Corrigé du DS5 du 18/01/20 (4h) - Sujet A
Probabilités, courbes paramétrées, séries entières

* * *

Corrigé de l'exercice 1 (Calcul d'une série entière).

1. *Pour $x=-1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$, et cette série diverge, car $\frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3} * \frac{1}{n} > 0$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.*
Mais cette divergence est non grossière, car $\frac{1}{3n+1} \to 0$. Donc le point $x=-1$ est situé sur le cercle d'incertitude, ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière est $R = |-1| = 1$.

2. *Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^n$, donc en remplaçant x par x^3 (possible car $x \in]-1;1[\Rightarrow x^3 \in]-1;1[$), on obtient :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad T(x) = xS(x^3) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}.$$

En dérivant terme à terme cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n.$$

3. *Le développement en série entière de $T'(x)$ est celui d'une série géométrique de raison $-x^3$, donc*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad T'(x) = \frac{1}{1+x^3}.$$

4. *Pour tout réel $x \neq -1$, on a*

$$\frac{a}{1+x} + b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a}{1+x} + b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{\frac{3}{4}c}{x^2-x+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{1+x} + b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{2bx - b + \frac{3}{4}c}{x^2-x+1},$$

ou encore

$$\frac{a}{1+x} + b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{(a+2b)x^2 + (-a+b+\frac{3}{4}c)x + (a-b+\frac{3}{4}c)}{1+x^3}.$$

Cette fraction rationnelle est donc égale à $\dfrac{1}{1+x^3}$ pour tout x si et seulement si

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ -a+b+\frac{3}{4}c = 0 \\ a-b+\frac{3}{4}c = 1 \end{cases},$$

ce qui équivaut à $(a,b,c) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}\right)$.

5. *La question précédente montre que*

$$\forall x \in \,]-1;1[, \qquad T'(x) = \frac{1/3}{1+t} - \frac{1}{6}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right) + \frac{2/3}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

donc en intégrant :

$$T(x) = T(0) + \int_0^x \frac{1/3}{1+t}dt - \int_0^x \frac{1}{6}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt + \int_0^x \frac{2/3}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}dt,$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in]-1;1[$ *:*

$$T(x) = \left[\frac{1}{3}\ln(1+t) - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x,$$

parce que les fonctions $t \mapsto t+1$ *et* $t \mapsto t^2-t+1$ *sont strictement positives sur l'intervalle* $[0;x] \subset]-1;1[$ *et parce que* $T(0) = 0 * S(0^3) = 0$*. Enfin,* $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\arctan(1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$*, donc*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad T(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right).$$

6. *Par définition de* T*, on a*

$$\forall x \in]-1;1[\setminus\{0\}, \qquad S(x) = \frac{T(x^{1/3})}{x^{1/3}},$$

c'est-à-dire

$$S(x) = \frac{1}{x^{1/3}}\left(\frac{1}{3}\ln(1+x^{1/3}) - \frac{1}{6}\ln(x^{2/3}-x^{1/3}+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{1/3}-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Enfin, on calcule $S(0)$ *à part :*

$$S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{3n+1} = \frac{0^0}{3*0+1} = 1,$$

(avec la convention "$0^0 = 1$*").*

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Etude d'une courbe).

1. *Le dénominateur commun de* f *et* g *s'annule en* -1 *et* 1*, puisque* $1-t^2 = (1-t)(1+t)$*. Donc les fonctions* f *et* g *sont définies sur* $\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}}$.

2. *On a* $\boxed{f(\sqrt{3}) = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}}$ *et* $\boxed{g(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

3. *L'ensemble* $E = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ *est symétrique par rapport à* 0*, et pour tout* $t \in E$*, on a* $f(-t) = f(t)$ *et* $g(-t) = -g(t)$*. Donc* $\boxed{f \text{ est paire et } g \text{ est impaire}}$.

   On en déduit que pour tout $t \in E$*,* $\boxed{M(-t) \text{ est le symétrique de } M(t) \text{ par rapport à l'axe } (O\overrightarrow{i})}$ *(puisque* $M(-t)$ *et* $M(t)$ *ont la même abscisse et des ordonnées opposées).*

4. *On a* $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{-t^2} = -1$ *et* $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^3}{-t^2} = -t$*, donc* $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = -1 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty}$.

5. *On a* $f(t) = \frac{t^2}{(1-t)(1+t)} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{2(1-t)}$ *et* $g(t) = \frac{t^3}{(1-t)(1+t)} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{2(1-t)} = f(t)$*.*

   Puisque $1-t<0$ *au voisinage de* 1^+ *et* $1-t>0$ *au voisinage de* 1^-*, on a* $\lim_{t\to1^+} \frac{1}{2(1-t)} = -\infty$ *et* $\lim_{t\to1^-} \frac{1}{2(1-t)} = +\infty$*, donc* $\boxed{\lim_{t\to1^+} f(t) = \lim_{t\to1^+} g(t) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{t\to1^-} f(t) = \lim_{t\to1^-} g(t) = +\infty}$.

6. *Puisque f et g sont des fonctions rationnelles, elles sont dérivables sur leur ensemble de définition E, et pour tout $t \in E$:*

$$\boxed{f'(t) = \frac{2t(1-t^2) - t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}},$$

$$\boxed{g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2) - t^3(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}}.$$

7. *Tableau de variations de f et g sur $E \cap \mathbb{R}^+ = [0;1[\cup]1;+\infty[$:*

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1
Variations de g	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $g'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

8. *On a* $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$, *donc en multipliant par t^2 :*

$$\boxed{f(t)} = t^2 + t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4) = \boxed{t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)}.$$

De même, en multipliant par t^3 :

$$\boxed{g(t)} = t^3 + t^5 + \underset{t\to 0}{o}(t^5) = \boxed{t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)}.$$

9. *Vu que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E, la formule de Taylor-Young s'applique, et*

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + \frac{t^3}{3!}f'''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

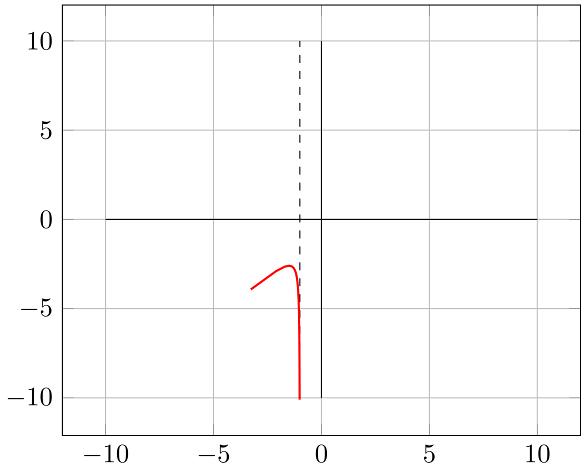
Par unicité des développements limités et par identification avec les résultats de la question précédente, on obtient $\boxed{f''(0) = 2}$. *En procédant de même avec g, on obtient* $\boxed{g''(0) = 0}$.

10. *La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $t = 0$ est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul, soit* $\boxed{(f''(0); g''(0)) = (2;0)}$. *La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une* $\boxed{\text{tangente horizontale en } t = 0}$.

11. *En $t = \sqrt{3}$, on a $f'(\sqrt{3}) \neq 0$ et $g'(\sqrt{3}) = 0$, donc le vecteur vitesse $(f'(\sqrt{3}), g'(\sqrt{3}))$ est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{i}$. On en déduit que le vecteur* $\boxed{\overrightarrow{i} = (1;0)}$ *dirige la tangente à $\mathcal{C}$ en $t = \sqrt{3}$, qui est donc* $\boxed{\text{horizontale}}$.

12. (a) *On a* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -1$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$, *donc* $\lim\limits_{t\to+\infty} (f(t)+1) = 0$, *ce qui montre que* $\boxed{\text{la droite d'équation } x+1=0 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{C} \text{ lorsque } t \to +\infty}$.

    (b) *Allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t_0 = +\infty$:*



13. *(a)* *Pour tout $t \in E$, on a*

$$\delta(t) = g(t) - f(t) + \frac{1}{2} = \frac{t^3 - t^2}{1 - t^2} + \frac{1}{2} = \frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{2} = \frac{-t^2}{1+t} + \frac{1}{2},$$

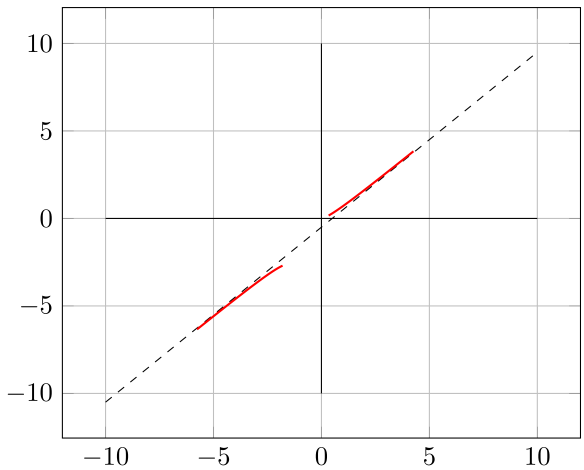
soit $\boxed{\delta(t) = \dfrac{-2t^2 + t + 1}{2(t+1)}}$.

(b) *Puisque* $\lim\limits_{t \to 1}(-2t^2 + t + 1) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to 1} 2(t+1) = 4$, *on a* $\boxed{\lim\limits_{t \to 1} \delta(t) = 0}$.

On en déduit que $\boxed{\textit{la droite } \mathcal{D} \textit{ (d'équation } y - x + \frac{1}{2} = 0\textit{) est asymptote à } \mathcal{C} \textit{ lorsque } t \to 1}$.

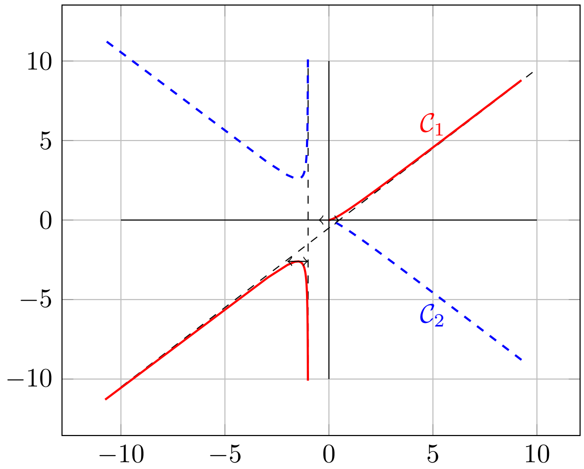
(c) *Puisque le dénominateur $2(t+1)$ est strictement positif pour tout $t > -1$ on en déduit que $\delta(t)$ a le même signe que son numérateur $P(t) = -2t^2 + t + 1 = -2(t-1)(t + \frac{1}{2})$ au voisinage de $t_0 = 1$.*
Mais $-2(t + \frac{1}{2}) < 0$ pour $t > -\frac{1}{2}$, donc $\delta(t)$ a le même signe que $1 - t$ au voisinage de $t_0 = 1$.
Finalement, on a $\boxed{\delta(t) > 0 \textit{ au voisinage de } 1^- \textit{ et } \delta(t) < 0 \textit{ au voisinage de } 1^+}$.

(d) *Allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t_0 = 1$:*



14.

15. **Tracé de la courbe**



* * *

Corrigé de l'exercice 3 (Apparition de deux *Pile* ou deux *Face* consécutifs).

1. (a) *Puisque $B \cap C \subset B$, on a $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(B \cap C) > 0$, donc $\mathbb{P}(B) > 0$. En utilisant l'inclusion $B \cap C \subset C$, on montre pareillement que $\mathbb{P}(C) > 0$. On a donc bien $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$ non nuls.*

   (b) *On a $A \cap C = (A \cap C) \cap \Omega = (A \cap C) \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. Cette réunion est disjointe (car B et $\overline{B}$ sont incompatibles), donc*

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C).$$

   (c) *En utilisant l'égalité précédente :*

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(C)}.$$

Or, $\mathbb{P}_{B \cap C}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)}$, ainsi que $\mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{B} \cap C)}$.
Donc

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}_{B \cap C}(A) \times \mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} + \frac{\mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(C)},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(\overline{B}).$$

2. (a) *$\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(E) = 1$ car si on a obtenu "FF" lors des deux premiers lancers, on est sûr que l'événement E est réalisé.*

   (b) *Si l'on a obtenu "FP" aux deux premiers lancers, alors la probabilité que E soit réalisé (i.e. $\mathbb{P}_{F_1 \cap \overline{F_2}}(E)$) est la même que si on a obtenu "P" au premier lancer (i.e. $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$). En effet, tant qu'une séquence "FF" ou "PP" n'est pas apparue, seul le résultat du dernier lancer en date influe sur la réalisation de l'événement E.*

   (c) *Utilisons 1.(c) avec $A = E$, $B = F_2$ et $C = F_1$. On a*

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \underbrace{\mathbb{P}_{F_2 \cap F_1}(E)}_{=1} \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \underbrace{\mathbb{P}_{\overline{F_2} \cap F_1}(E)}_{=\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)} \times \mathbb{P}_{F_1}(\overline{F_2}).$$

Or, $\mathbb{P}_{F_1}(F_2) = \mathbb{P}(F_2) = q$ (puisque F_1 et F_2 sont indépendants), et de même, $\mathbb{P}_{F_1}(\overline{F_2}) = \mathbb{P}(\overline{F_2}) = p$ (puisque F_1 et $\overline{F_2}$ sont indépendants). Donc

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = 1 \times q + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \times p = q + p\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E).$$

3. (a) *$\mathbb{P}_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(E) = 0$ car si on a obtenu "PP" lors des deux premiers lancers, on est sûr que l'événement E n'est pas réalisé.*

(b) *Utilisons 1.(c) avec* $A = E$, $B = \overline{F_2}$ *et* $C = \overline{F_1}$. *On a*

$$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \underbrace{\mathbb{P}_{\overline{F_2}\cap\overline{F_1}}(E)}_{=0} \times \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) + \underbrace{\mathbb{P}_{F_2\cap\overline{F_1}}(E)}_{=\mathbb{P}_{F_1}(E)} \times \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2).$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) = \mathbb{P}(F_2) = q$ *(puisque* $\overline{F_1}$ *et* F_2 *sont indépendants). Donc*

$$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E) \times q.$$

4. (a) *Il suffit de résoudre le système linéaire* $\begin{cases} \mathbb{P}_{F_1}(E) = q + p\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \\ \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E) \end{cases}$.

Il est équivalent (par substitution) à $\begin{cases} \mathbb{P}_{F_1}(E) = q + pq\mathbb{P}_{F_1}(E) \\ \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E) \end{cases}$, *donc*

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq}, \qquad \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}.$$

(b) *En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $(F_1, \overline{F_1})$, *on obtient*

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \times \mathbb{P}(\overline{F_1}) = \frac{q}{1-pq} \times q + \frac{q^2}{1-pq} \times p = \frac{(1+p)q^2}{1-pq}.$$

5. (a) *Pour calculer* $\mathbb{P}(G)$, *il suffit d'inverser les rôles de* p *et* q *(ce qui correspond à inverser Pile et Face). On obtient donc* $\mathbb{P}(G) = \dfrac{(1+q)p^2}{1-pq}$.

(b) *On a* $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{1-pq}\left((1+p)q^2 + (1+q)p^2\right) = \dfrac{1}{1-pq}\left(p^2 + q^2 + pq\underbrace{(q+p)}_{=1}\right)$,

donc $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{1-pq}\left(\underbrace{(p+q)}_{=1}^2 - pq\right) = \dfrac{1-pq}{1-pq} = 1$.

(c) *Vu que* E *et* G *sont incompatibles, on a* $\mathbb{P}(E \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$. *Cela signifie donc que l'événement* $E \cup G$ *est presque sûr. Concrètement, "on est presque sûr d'obtenir au moins une séquence "PP" ou "FF" dans l'infinité de lancers".*

6. (a) *On a* $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = E$, *car* E *est réalisé si et seulement si il existe une première apparition (aux rangs* $n+1$ *et* $n+2$*) de la séquence "FF" avant "PP".*

(b) $E_0 = F_1 \cap F_2$ *(on obtient "FF" aux deux premiers lancers).*
$E_1 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3$ *(on obtient "FF" aux lancers 2 et 3, et donc nécessairement "P" au premier lancer).*
$E_2 = F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4$ *(on obtient "FF" pour la première fois aux lancers 3 et 4, donc nécessairement "P" au rang 2, et "F" au rang 1, puisque "PP" ne doit pas apparaître).*
De même, on a $E_3 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap F_4 \cap F_5$.

(c) *Pour* $n = 2k$ *(c'est-à-dire* n *pair), l'événement* E_n *est réalisé si et seulement si on obtient une suite alternée de "P" et "F" lors des* n *premiers lancers, qui se termine par "P", et qui commence donc par "F". On a ainsi "FPFP⋯FPFF", c'est-à-dire*

$$E_{2k} = F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap \overline{F_{2k}} \cap F_{2k+1} \cap F_{2k+2}.$$

(d) *Les événements* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont mutuellement indépendants, donc*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(\overline{F_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{2k-1}) \times \mathbb{P}(\overline{F_{2k}}) \times \mathbb{P}(F_{2k+1}) \times \mathbb{P}(F_{2k+2}),$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_k) = qp\cdots qp \times q^2 = p^k q^{k+2}.$$

(e) *Similairement, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$E_{2k+1} = \overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2k-1}} \cap F_{2k} \cap \overline{F_{2k+1}} \cap F_{2k+2} \cap F_{2k+3},$$

donc, par indépendance mutuelle,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_{2k+1}) = pq \cdots pqp \times q^2 = p^{k+1} q^{k+2}.$$

(f) *Vu que les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0} E_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2k}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (p^k q^{k+2} + p^{k+1} q^{k+2}) \\ &= (1+p)q^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (pq)^k = \frac{(1+p)q^2}{1-pq}, \end{aligned}$$

et c'est bien conforme au résultat de la question 4.(b).

* * *