DS5 du 18/01/20 (4h) - Sujet A
Probabilités, courbes paramétrées, séries entières

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (Calcul d'une série entière).

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$.

Pour $x \in]-R;R[$, on notera $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$ la somme de cette série.

Dans la suite, on pose $T(x) = xS(x^3)$ pour tout $x \in]-R;R[$.

2. Calculer le développement en série entière de $T(x)$, puis de $T'(x)$ (on indiquera leurs domaines de validité).
3. Calculer explicitement $T'(x)$.
   On pourra reconnaître une série géométrique.
4. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel $x \neq -1$, on ait :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + b\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

5. En déduire une expression explicite de $T(x)$.
6. Calculer enfin $S(x)$ pour tout $x \in]-R;R[$.

* * *

Exercice 2 (Etude d'une courbe).
On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2}, \qquad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$. On a donc

$$\overrightarrow{OM(t)} = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}.$$

On note $\mathcal{C}$ la trajectoire de la courbe paramétrée ainsi définie. C'est l'ensemble des points $M(t)$, pour t variant dans un domaine réel à préciser.

Partie I - Etude des fonctions coordonnées

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
   Dans la suite, on notera E l'intersection de ces deux ensembles. C'est l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le point $M(t)$ existe.
2. Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.

3. Etudier la parité des fonctions f et g. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ par rapport au point $M(t)$?
4. Déterminer les limites de f et de g en $+\infty$.
5. Déterminer les limites de f et de g en 1^+ et 1^-.
6. Montrer que f et g sont dérivables sur E et déterminer f' et g'.
7. Déduire des questions précédentes les tableaux de variations des fonctions f et g sur $E \cap \mathbb{R}^+$, dans lesquels figureront les limites ainsi que les valeurs de $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.
On présentera le résultat sous la forme d'un tableau de variation conjoint.

Partie II - Tangente à l'origine et au point de paramètre $\sqrt{3}$

8. Déterminer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions f et g.
9. Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'', déterminer la valeur de $f''(0)$ et de $g''(0)$.
On mentionnera le théorème utilisé.
10. En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point de paramètre $t = 0$.
11. Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point de paramètre $t = \sqrt{3}$.

Partie III - Asymptotes

On considère un élément $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tel que au moins une des deux coordonnées $f(t)$ ou $g(t)$ possède une limite infinie lorsque $t \to t_0$.
Etant donnés trois réels a, b, c tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, on dit que la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque $t \to t_0$ si :

$$\lim_{t \to t_0} af(t) + bg(t) + c = 0,$$

(ce qui revient à dire que la distance entre le point $M(t)$ et la droite $ax + by + c = 0$ tend vers 0 lorsque $t \to t_0$).

12. *Etude au voisinage de $t_0 = +\infty$.*
    (a) En examinant les limites de $f(t)$ et $g(t)$ lorsque $t \to +\infty$, montrer que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote verticale (dont on déterminera une équation cartésienne) lorsque $t \to +\infty$.
    (b) Esquisser rapidement **sur la copie** l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t_0 = +\infty$.
    Inutile de faire un dessin précis, cela sera fait dans la partie IV.
13. *Etude au voisinage de $t_0 = 1$.*
On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $y = x - \frac{1}{2}$, et pour $t \in E$, on pose

$$\delta(t) = g(t) - f(t) + \frac{1}{2}.$$

    (a) Montrer que pour tout $t \in E$, $\delta(t) = \dfrac{P(t)}{2(t+1)}$, où P est un polynôme de degré 2 à déterminer.
    (b) Déterminer $\lim_{t \to 1} \delta(t)$. Que peut-on en déduire ?
    (c) Quel est le signe de $\delta(t)$ au voisinage de $t_0 = 1$?
    (d) Esquisser rapidement **sur la copie** l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $t_0 = 1$.
    Inutile de faire un dessin précis, cela sera fait dans la partie IV.

Partie IV - Tracé de la courbe

14. En tenant compte des informations issues des questions précédentes et **en utilisant la feuille de papier millimétré (à rendre avec la copie)**, tracer la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_1 = \{M(t) \ / \ t \in E \cap \mathbb{R}^+\}.$$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées. On considèrera par ailleurs que $\sqrt{3} \simeq 1,73$.
On fera apparaître :
- la droite $\mathcal{D}$;
- les vecteurs tangents aux points de paramètres $t = 0$ et $t = \sqrt{3}$;
- la droite d'équation $x = -1$.

15. En utilisant une couleur différente ou en pointillés, compléter le tracé précédent en traçant la courbe suivante :

$$\mathcal{C}_2 = \{M(t) \ / \ t \in E \cap \mathbb{R}^-\}.$$

* * *

Exercice 3 (Apparition de deux *Pile* ou deux *Face* consécutifs).
Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Pour tout événement M et pour tout événement N tel que $\mathbb{P}(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N est :

$$\mathbb{P}_N(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap N)}{\mathbb{P}(N)}.$$

Pour chaque événement M, on notera $\overline{M}$ son événement contraire.

1. *Une formule utile*
On considère trois événements A, B, C tels que $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B} \cap C) \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(C) \neq 0$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)$.
   (c) En déduire alors la formule suivante :

$$\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(\overline{B}).$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), et *Face* avec la probabilité q, où $q = 1 - p$. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience (on ne cherchera pas à le construire !), et tel que les résultats des différents lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : "on obtient *Face* au k^e lancer".
L'événement $\overline{F_k}$ est donc : "on obtient *Pile* au k^e lancer".

On considère l'événement E : "Deux *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de deux *Pile* consécutifs".
Par exemple :
- si les résultats des six premiers lancers sont "$FPFPFF$", alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont "$PFFPPF$", alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont "$FPFPPF$", alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(E)$.
   (b) Justifier sans calcul la relation : $\mathbb{P}_{F_1 \cap \overline{F_2}}(E) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 1.(c), montrer que

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = q + p\, \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E).$$

3. (a) Que vaut $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?
   (b) On admet que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E)$ (cela se montre comme en 2.(b)).
   En utilisant le résultat de la question 1.(c), montrer que

$$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\,\mathbb{P}_{F_1}(E).$$

4. (a) Déduire des questions 2. et 3. les expressions de $\mathbb{P}_{F_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$ en fonction de p et q.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(E)$ en fonction de p et q.
5. On note G l'événement : "Deux *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de deux *Face* consécutifs".
   (a) Expliquer comment trouver $\mathbb{P}(G)$ sans calcul.
   (b) Vérifier que $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$.
   (c) Comment interpréter ce résultat ?
6. On considère maintenant les événements :
   E_n : "on obtient FF aux lancers $n+1$ et $n+2$ sans qu'il n'y ait eu FF ou PP auparavant".
   On remarque que les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles.
   (a) Quel est l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$?
   (b) Exprimer E_0, E_1, E_2 et E_3 en fonction des événements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Expliquer pourquoi on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad E_{2k} = F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap \overline{F_{2k}} \cap F_{2k+1} \cap F_{2k+2}.$$

   (d) En déduire $\mathbb{P}(E_{2k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Calculer de même $\mathbb{P}(E_{2k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (f) Retrouver ainsi la valeur de $\mathbb{P}(E)$.

* * *