Corrigé du DS4 du 23/11/19 (4h) - Sujet B
Fonctions réelles, complexes et intégration

* * *

Corrigé de l'exercice 1 (Etude d'une intégrale à paramètre).

1. *Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto x + t$ est continue (car affine) et ne s'annule pas sur $[0; 1]$ (puisque $\forall t \in [0; 1]$, $x + t \geq x > 0$). De plus la fonction $t \mapsto e^t$ est continue sur $[0; 1]$. Donc par quotient, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{x+t}$ est continue sur $[0; 1]$.*

2. *Fixons x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$, et montrons que $f(x) \geq f(y)$.*
Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $0 < x + t \leq y + t$, donc $\dfrac{1}{x+t} \geq \dfrac{1}{y+t}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$). En multipliant par $e^t > 0$, on obtient :
$$\forall t \in [0; 1], \quad \frac{e^t}{x+t} \geq \frac{e^t}{y+t}.$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit (car les bornes sont "dans le bon sens") :
$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^t}{y+t}dt,$$
c'est-à-dire $f(x) \geq f(y)$. Finalement, on a montré $(0 < x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$, ce qui signifie que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a) *Pour deux réels x et x_0 strictement positifs, on a par linéarité de l'intégrale :*
$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt \right| = \left| (x_0 - x) \int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \right|,$$
c'est-à-dire
$$|f(x) - f(x_0)| = \left(\int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \right) \times |x - x_0|,$$
puisque $\dfrac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \geq 0$.
Reste à majorer l'intégrale : pour tout $t \in [0; 1]$, on a $\dfrac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \leq \dfrac{e}{xx_0}$, donc par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \leq \int_0^1 \frac{e}{xx_0} dt = \frac{e}{xx_0}.$$
Si on suppose de plus que $x \in [\dfrac{x_0}{2}; +\infty[$, on a alors $\frac{e}{xx_0} \leq \frac{2e}{x_0^2}$ et donc
$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e}{x_0^2} |x - x_0|,$$
ce qui est l'inégalité voulue.

(b) *D'après la question précédente, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2e}{x_0^2}|x - x_0|$ pour tout x dans un voisinage de x_0 (l'intervalle $x \in [\dfrac{x_0}{2}; +\infty[$). Puisque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2e}{x_0^2}|x - x_0| = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ceci montre que f est continue au point x_0.*

4. (a) *Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x+t} \leq \dfrac{1}{x}$, donc*

$$\forall t \in [0;1], \quad \frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1}dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt \int_0^1 \frac{e^t}{x}dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x},$$

puisque $\displaystyle\int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0 = e - 1$.

(b) *L'inégalité précédente montre que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} = 1$.
En effet, en multipliant cette inégalité par $\frac{x}{e-1} > 0$, on obtient

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leq 1.$$

Mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, *donc on conclut par le théorème des gendarmes que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} = 1$, *c'est-à-dire* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$.

5. (a) *Soit $t \in [0;1]$. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction exp (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$) sur l'intervalle $[0;t]$:*
pour tout $u \in [0;t]$, on a $|\exp'(u)| = e^u \leq e^t \leq e^1$, donc $|e^t - e^0| \leq e|t-0|$, c'est-à-dire

$$|e^t - 1| \leq et.$$

La constante $M = e$ (qui est indépendante de t) convient donc.

(b) *Majorons $|g(x)|$: pour tout $x > 0$, on a*

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \left|\frac{e^t-1}{x+t}\right| dt = \int_0^1 \frac{|e^t-1|}{x+t}dt.$$

D'après la question précédente, on a $\forall t \in [0;1]$, $|e^t - 1| \leq et$, donc par croissance de l'intégrale :

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \frac{et}{x+t}dt.$$

En outre, $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{et}{x+t} \leq e$, donc par croissance de l'intégrale encore :

$$|g(x)| \leq \int_0^1 e dt = e,$$

ce qui montre que g est bornée (par la constante e) sur $]0;+\infty[$.

(c) *Partons de l'indication fournie :*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt + g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + g(x).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(x+1) = 0$, *que g est bornée, et que* $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(-\ln(x)) = +\infty$, *on a*

$$\ln(x+1) = \underset{x\to0^+}{o}(-\ln(x)), \qquad g(x) = \underset{x\to0^+}{o}(-\ln(x)),$$

donc

$$f(x) = -\ln(x) + \underset{x\to0^+}{o}(-\ln(x)),$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

6. (a) *La fonction* $h : t \mapsto \dfrac{e^t}{1+t}$ *est clairement dérivable sur le segment* $[0;1]$*, et*

$$\forall t \in [0;1], \quad h'(t) = e^t\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) = \frac{te^t}{(1+t)^2}.$$

La dérivée h' *est positive sur* $[0;1]$*, donc* h *est croissante sur* $[0;1]$*.*

(b) *Les quantités* u_n *et* v_n *sont des sommes de Riemann associées à la subdivision* $\left(\frac{k}{n}\right)_{0\leq k\leq n}$ *de l'intervalle* $[0;1]$*. Ce sont des aires de rectangles (rectangles "à gauche" pour* u_n*, rectangles "à droite" pour* v_n*), elles approchent l'intégrale* $f(1) = \displaystyle\int_0^1 h(t)dt$*.*

(c) *Soit* $k \in [\![0; n-1]\!]$*. Par croissance de* h *sur le segment* $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}] \subset [0;1]$*, on a*

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k+1}{n}\right) dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)dt \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

puisque $\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} dt = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$*.*

(d) *En sommant les inégalités précédentes pour* k *allant de* 0 *à* $n-1$*, on obtient*

$$u_n \leq \int_0^1 h(t)dt \leq v_n,$$

puisque

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)dt = \int_0^1 h(t)dt,$$

par la relation de Chasles. On a donc montré $u_n \leq f(1) \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

(e) *D'après la question précédente, on a*

$$0 \leq f(1) - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(h(1) - h(0)\right)$$

(par téléscopage).

(f) *Il suffit que* $\dfrac{h(1)-h(0)}{n} \leq 10^{-2}$*, c'est-à-dire* $n \geq 100\left(\frac{e}{2} - 1\right) \simeq 35,9$*.*
Donc $n_0 = 36$ *convient : la somme* u_{36} *est une valeur approchée de* $f(1)$ *à* 10^{-2} *près.*

* * *

Corrigé de l'exercice 2.
Fait dans le cours !

* * *

Corrigé de l'exercice 3 (La constante γ d'Euler).
Partie I : La constante γ. Une expression sous forme de série.

1. (a) *On étudie la fonction $\varphi : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x + \ln(1-x)$.*
   Elle est dérivable sur $[0;1[$ et $\forall x \in [0;1[$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0$, donc φ est décroissante. On en déduit que $\forall x \in [0;1[$, $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$.

   (b) *On étudie la fonction $\psi : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = x - \ln(1+x)$.*
   Elle est dérivable sur $[0;1[$ et $\forall x \in [0;1[$, $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$, donc ψ est croissante. On en déduit que $\forall x \in [0;1[$, $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$.

2. • *Pour $n \geq 2$,*

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

   et cette quantité est négative d'après l'inégalité établie en 1.(a) (utilisée avec $x = \frac{1}{n+1}$). Donc $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 2$, ce qui montre que $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

   • *Pour $n \geq 2$,*

$$v_{n+1} - v_n = S_n - \ln(n+1) - S_{n-1} + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

   et cette quantité est positive d'après l'inégalité établie en 1.(b) (utilisée avec $x = \frac{1}{n}$). Donc $v_{n+1} \geq v_n$ pour tout $n \geq 2$, ce qui montre que $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

   • *Les suites u et v sont monotones, de monotonies contraires, et*

$$u_n - v_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   donc u et v sont adjacentes.

3. (a) *On a $x_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0 :*

$$x_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   ce qui montre que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) *La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ aussi. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, on en déduit par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs que $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge.*

   (c) *Examinons les sommes partielles de la série $\sum x_n$: pour tout $n \geq 1$*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1)\right) = S_n + \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k) - \ln(k+1)\right),$$

   donc par téléscopage :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = S_n - \ln(n+1) = v_{n+1}.$$

   Puisque $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, et donc

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Partie II : Une expression intégrale de la constante γ.

4. (a) *Vu que* $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, *on a* $f(x) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

   (b) *La fonction* $g : x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x(1-e^{-x})}$ *est clairement continue sur* $]0;+\infty[$, *et d'après la question précédente :*

$$g(x) = \frac{f(x)}{x(1-(1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)))} = \frac{f(x)}{x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

   ce qui montre que $\lim_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$. *La fonction* g *possède donc un prolongement continu à* $[0;+\infty[$ *(puisqu'elle possède une limite finie en* 0^+*).*

   (c) *La fonction* g *(qui rappelons-le est maintenant prolongée à* $[0;+\infty[$*) est continue sur* $[0;+\infty[$ *et tend vers* 1 *en* $+\infty$, *donc elle est bornée. En effet :*

   - *Puisque* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, *on a* $-2 \leq g(x) \leq 2$ *dans un voisinage* $V = [x_0;+\infty[$ *de* $+\infty$, *c'est-à-dire* $|g(x)| \leq 2$.
   - *En dehors de ce voisinage* V, *la fonction* g *est continue sur le segment* $[0;x_0]$, *donc bornée :*

$$\exists A > 0,\ \forall x \in [0;x_0], \qquad |g(x)| \leq A.$$

   Donc pour tout $x \in [0;+\infty[$, *on a* $|g(x)| \leq K = \max(2;A)$, *ce qui montre que* g *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$.

5. *La fonction* $x \mapsto e^{-x}g(x)$ *est continue sur* $[0;+\infty[$, *donc l'intégrale* I *est impropre en* $+\infty$.
Or, on a $\forall x \geq 0$, $|e^{-x}g(x)| = |g(x)|e^{-x} \leq Ke^{-x}$, *et l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} Ke^{-x}dx = K\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ *converge (c'est un exemple de référence), donc par le critère de comparaison pour les fonctions positives, on en déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} |e^{-x}g(x)|dx$ *converge.*
Ceci montre que l'intégrale I *est absolument convergente, donc convergente.*

6. *Fixons un entier* $n \geq 1$.

   (a) *La fonction* $x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}$ *est continue sur* $[1;+\infty[$, *donc l'intégrale* I_n *est impropre en* $+\infty$. *De plus :*

$$\forall x \geq 1, \quad \left|\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\right| = \frac{|e^{-x}-e^{-nx}|}{x} \leq |e^{-x}-e^{-nx}| \leq e^{-x} + e^{-nx} \leq 2e^{-x}.$$

   Puisque $\int_1^{+\infty} 2e^{-x}dx$ *converge, on en déduit par le critère de comparaison pour les fonctions positives que* $\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\right| dx$ *converge. Ceci montre que* I_n *est absolument convergente, donc convergente.*

   (b) i. *Tout à fait similaire à la question précédente : les fonctions* $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ *et* $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$ *sont continues sur* $[1;+\infty[$, *positives et toutes les deux majorées par* e^{-x} *(dont l'intégrale impropre entre 1 et* $+\infty$ *converge). Donc par comparaison, les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}dx$ *convergent, ce qui montre que* $J(X)$ *et* $K_n(X)$ *ont des limites finies lorsque* $X \to +\infty$.

   ii. *On effectue le changement de variable* $u = nx$ *(*$du = ndx$*) dans l'intégrale* $K_n(X)$ *:*

$$K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x}dx = \int_n^{nX} \frac{e^{-u}}{u}du,$$

   ce qui montre bien le résultat voulu.

   iii. *Puisque* I_n *converge, on a* $I_n = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$.
   Or, pour tout réel $X > 1$, *on a par linéarité de l'intégrale :*

$$\int_1^X \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx = J(X) - K_n(X).$$

Faisons alors tendre X vers $+\infty$. On a $\lim_{X\to+\infty} J(X) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$, ainsi que

$$\lim_{X\to+\infty} K_n(X) = \lim_{X\to+\infty} \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Donc :

$$I_n = \lim_{X\to+\infty} J(X) - \lim_{X\to+\infty} K_n(X) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_1^{n} \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

(c) *Par linéarité de l'intégrale sur le segment $[1;n]$, on a*

$$\int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x}dx = \int_1^n \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x}dx = \ln(n) - I_n,$$

c'est-à-dire

$$I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$$

7. (a) *Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $\varphi_t : x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et possède une limite finie lorsque $x \to 0$, puisque :*

$$\varphi_t(x) = \frac{(1 - x + \underset{x\to0}{o}(x)) - (1 - xt + \underset{x\to0}{o}(x))}{x} = \frac{xt - x + \underset{x\to0}{o}(x)}{x} = t - 1 + \underset{x\to0}{o}(1),$$

et donc $\lim_{x\to0} \varphi_t(x) = t - 1$. La fonction φ_t admet donc un prolongement continu à $\mathbb{R}$.

(b) *Fixons $t \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction $x \mapsto \varphi_t(x)$ est continue sur $]0;1]$ et admet une limite finie en 0^+, l'intégrale $F(t) = \int_0^1 \varphi_t(x)dx$ est faussement impropre en 0, donc convergente. La fonction $F : t \mapsto F(t)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.*

(c) *En admettant le résultat proposé, on a*

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad F'(t) = \int_0^1 e^{-xt}dx = \left[\frac{e^{-xt}}{-t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1-e^{-t}}{t}.$$

En outre, $F'(0) = \int_0^1 1dx = 1$.

(d) *Pour tout $x \in]0;1]$, on a $\varphi_1(x) = \frac{e^{-x}-e^{-x}}{x} = 0$, donc en intégrant, on obtient $F(1) = 0$.*

(e) *Les deux questions précédentes montrent que F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ qui s'annule en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a donc*

$$\forall t \geq 1, \qquad F(t) = \int_1^t \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$$

8. (a) *Avec les notations de la question 7.(a), on a, pour tout entier $n \geq 1$:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx.$$

On a montré que la fonction φ_n est continue sur $]0;+\infty[$, et se prolonge continûment en 0, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx$ est faussement impropre en 0.
De plus, on a déjà montré que $\int_1^{+\infty} \varphi_n(x)dx$ converge (il s'agit de l'intégrale I_n étudiée à la question 6.(a)). En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx$ converge pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 6.(c), on a $I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x}dx$.*
Mais d'après 7.(e), $\int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x}dx = F(n)$, donc

$$I_n = \ln(n) - F(n) = \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}dx.$$

(c) *Dans la formule obtenue à la question précédente, on utilise la définition de* I_n *:* $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, donc*

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx,$$

c'est-à-dire

$$\ln(n) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx.$$

9. (a) *Par linéarité de l'intégrale impropre convergente, on a, pour* $n \geq 2$,

$$L_n - I = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) g(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x) dx,$$

donc

$$|L_n - I| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-nx} g(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \underbrace{|g(x)|}_{\leq K} dx \leq K \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$$

(le tout sous réserve de convergence). Mais $\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$ *converge et vaut* $\frac{1}{n}$ *(c'est un exemple de référence), donc*

$$|L_n - I| \leq \frac{K}{n}.$$

(b) *Vu que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{K}{n} = 0$*, la majoration de la question précédente montre que* $\lim\limits_{n \to +\infty} |L_n - I| = 0$*, donc que* (L_n) *converge vers* I.

(c) *Pour tout entier* $n \geq 2$ *et tout réel* $x > 0$*, on a* $e^{-x} \neq 1$*, donc*

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-x})^k - 1 = \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}.$$

Partant de l'expression de la fonction g *et de l'intégrale* L_n*, on a donc, pour tout entier* $n \geq 2$ *:*

$$L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{-kx} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx.$$

D'après la question 8.(c), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx$ *converge et vaut* $\ln(n)$.
De plus, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*, l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ *converge et vaut* $\frac{1}{k}$.
On en déduit par linéarité de l'intégrale convergente que

$$\forall n \geq 2, \qquad L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = v_n.$$

(d) *On a* $I = \lim\limits_{n \to +\infty} L_n$ *d'après 9.(a). Or, la question précédente montre que la suite* (L_n) *est égale à la suite* (v_n)*, qui converge vers* γ *d'après la partie I. On a donc*

$$I = \lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma.$$

10. (a) *Tout d'abord, on a (puisque* φ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*) :*

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt.$$

On effectue alors une intégration par parties pour modifier l'intégrale, en intégrant $t \mapsto 1$ (et en choisissant la primitive $t \mapsto t - x$) et en dérivant $t \mapsto \varphi'(t)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^x \varphi'(t)dt = [(t-x)\varphi'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)\varphi''(t)dt = x\varphi'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt,$$

ce qui donne la formule voulue.

(b) *Fixons $h \in [-1;1]$. En appliquant la formule précédente à la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-hx}$, on obtient (puisque $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = -h$) pour tout $x \in [0;1]$:*

$$|e^{-hx} - 1 + hx| = |\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)| = \left|\int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt\right|,$$

c'est-à-dire

$$|e^{-hx} - 1 + hx| = \left|\int_0^x (x-t)h^2e^{-ht}dt\right| \leq h^2 \int_0^x |x-t|e^{-ht}dt.$$

Puisque $x \geq 0$, on a $|x-t| = x-t$ pour tout $t \in [0;x]$, et $e^{-ht} \leq e^x \leq e$, donc

$$|e^{-hx} - 1 + hx| \leq h^2 \int_0^x (x-t)e^{-ht}dt \leq eh^2 \int_0^x (x-t)dt = eh^2\frac{x^2}{2},$$

d'où le résultat voulu avec $M = e$.

(c) *Fixons $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1;1] \setminus \{0\}$. On a, par linéarité de l'intégrale :*

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-x(t+h)}}{x}dx - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}dx\right) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{e^{-xt} - e^{-x(t+h)}}{x}dx,$$

donc (toujours par linéarité de l'intégrale) :

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt}dx = \int_0^1 \frac{e^{-xt} - e^{-x(t+h)} - hxe^{-xt}}{hx}dx = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{hx}(1-hx-e^{-hx})dx.$$

On en déduit

$$\left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt}dx\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{|h|x}|1-hx-e^{-hx}|dx.$$

Or, d'après la question précédente, on a $|1-hx-e^{-hx}| = |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \dfrac{eh^2x^2}{2}$ pour tout $x \in [0;1]$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt}dx\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{|h|x}\frac{eh^2x^2}{2}dx = \int_0^1 \frac{|h|x}{2}e^{-xt}\ e\ dx$$

(d) *Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la majoration établie à la question précédente montre que*

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt}dx\right| = 0$$

(puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{|h|x}{2}e^{-xt}\ e\ dx = |h| \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{2}e^{-xt}\ e\ dx}_{\text{indépendant de } h}$). On a donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_0^1 e^{-xt}dx,$$

ce qui prouve bien que F est dérivable au point t et que $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt}dx$.

* * *