DS4 du 23/11/19 (4h) - Sujet B
Fonctions réelles, complexes et intégration

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (Etude d'une intégrale à paramètre).
On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt$ *ne dépend que de* x *(pas de* t*), c'est pourquoi on l'appelle* $f(x)$*.*
IMPORTANT : On ne cherchera pas dans ce problème à calculer explicitement $f(x)$.

1. Justifier que $f(x)$ est bien défini pour tout réel $x > 0$.
2. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Attention, ici on ne sait pas montrer que f *est dérivable, donc impossible de montrer que* $f' \leq 0$*. On reviendra donc plutôt à la définition d'une fonction décroissante.*
3. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \geq \frac{x_0}{2}$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}$.
   (b) En déduire que f est continue au point x_0.
4. (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$.
   (b) En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$.
5. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que :
   $$\forall t \in [0;1], \quad |e^t - 1| \leq Mt.$$
   (b) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}dt.$$
   Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer finalement : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
   Indication : remarquer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt + g(x)$.
6. Dans cette question, on se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale
   $$f(1) = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t}dt.$$
   On introduit la fonction h définie sur $[0;1]$ par la relation : $\forall t \in [0;1]$, $h(t) = \frac{e^t}{1+t}$.
   On définit également deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ en posant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(a) Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0;1]$.

(b) Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n.

(c) Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}, \qquad \frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)dt \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(d) En déduire que $u_n \leq f(1) \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) En déduire que $0 \leq f(1) - u_n \leq \dfrac{h(1)-h(0)}{n}$.

(f) Déterminer une valeur explicite de n, notée n_0, telle que u_{n_0} soit une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près.

* * *

Exercice 2 (Sommes partielles de la série harmonique).
Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Redémontrer par comparaison série-intégrale que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Dans l'exercice suivant, on va continuer l'étude de la série harmonique en montrant qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $S_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

* * *

Exercice 3 (La constante γ d'Euler).
Les parties I et II de ce problème sont largement indépendantes.

Partie I : La constante γ. Une expression sous forme de série.

On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = S_n - \ln n, \quad v_n = S_{n-1} - \ln n.$$

1. (a) Montrer que : $\forall x \in [0,1[,\ x + \ln(1-x) \leqslant 0$.

   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1[,\ x - \ln(1+x) \geqslant 0$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Etant adjacentes, les suites u et v convergent donc vers une limite commune, que l'on appelle **la constante d'Euler**, *et que l'on note γ :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma.$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ converge.

   (b) En déduire que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Partie II : Une expression intégrale de la constante γ.

On pose pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}.$$

4. (a) On pose pour tout x réel, $f(x) = x - 1 + e^{-x}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
   (b) En déduire que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (encore notée g).
   (c) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera K un réel tel que pour tout $x \geqslant 0$, $|g(x)| \leqslant K$.
5. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) \mathrm{d}x.$$

   Montrer que l'intégrale I est convergente.
6. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente.
   (b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $X > 1$:

$$J(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} \mathrm{d}x.$$

      i. Montrer que $J(X)$ et $K_n(X)$ ont des limites finies lorsque X tend vers $+\infty$.
      ii. Montrer que $K_n(X) = \displaystyle\int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$.
      iii. En déduire que $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$.
   (c) En utilisant **6.(b).iii**, montrer que

$$I_n = \ln n - \int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

7. Posons $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \mathrm{d}x$.
   (a) On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi_t(x) = \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}.$$

   Montrer que φ_t peut être prolongée par continuité en 0.
   On continuera de noter φ_t la fonction continue sur $\mathbb{R}$ ainsi déterminée.
   (b) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'intégrale impropre $F(t)$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   On admet dans la suite que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F'(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-xt} dx$$

   (c'est-à-dire que l'on peut "dériver sous le signe intégrale").
   On démontrera ce résultat à la fin du problème.
   (c) Calculer $F'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Calculer $F(1)$.
   (e) En déduire que $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$ pour tout réel $t \geq 1$.

8. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \mathrm{d}x$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \ln n - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \mathrm{d}x$.

   (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \mathrm{d}x = \ln n.$$

9. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) g(x) \mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $|L_n - I| \leqslant \dfrac{K}{n}$.
   On rappelle que la constante K a été définie en **4.(c)**, *et l'intégrale I a été définie en* **5.**

   (b) Montrer que la suite $(L_n)_{n \geqslant 2}$ converge. Donner sa limite.

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $L_n = v_n$.
   On rappelle que la suite (v_n) a été définie dans la partie I.
   Indication : on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kx} = \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}.$$

   (d) En déduire que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) \mathrm{d}x.$$

10. Pour terminer, nous allons démontrer le résultat qui a été admis (entre les questions **7.(b)** et **7.(c)**), à savoir :
la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} dx$.

   (a) A l'aide d'intégration par parties, montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, et pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \int_0^x (x - t)\varphi''(t) dt$$

   (c'est la *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 2).

   (b) A l'aide de la formule précédente, montrer qu'il existe une constante M (à déterminer) telle que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1],\ \left|e^{-hx} - 1 + hx\right| \leq \frac{h^2 x^2}{2} M.$$

   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, montrer que :

$$\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 \frac{|h| x}{2} e^{-xt} M \mathrm{d}x.$$

   (d) Conclure.

* * *