Corrigé du DS4 du 23/11/19 (4h) - Sujet A
Fonctions réelles, complexes et intégration

Corrigé de l'exercice 1 (Echauffement).

1. (a) *La fonction* $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$ *est continue sur* $[2;+\infty[$ *donc l'intégrale* I *est impropre en* $+\infty$. *En outre,* $\dfrac{4x^2}{x^4-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{x^2} > 0$, *et l'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4}{x^2}dx$ *converge (d'après le critère de Riemann), donc* $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ est convergente}}$ *d'après le critère des équivalents.*

   (b) *Pour tous réels* a, b, c, d, *on a*

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)}{x^4-1},$$

donc cette fraction rationnelle est égale à $\frac{4x^2}{x^4-1}$ *pour tout* x *si et seulement si*

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+d=4 \\ a+b-c=0 \\ a-b-d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

On a donc $\forall x \in [2;+\infty[,\ \dfrac{4x^2}{x^4-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2+1}$.
Ceci permet de calculer I *: pour tout réel* $X > 2$, *on a*

$$\int_2^X \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \int_2^X \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\arctan(x)\right]_2^X,$$

c'est-à-dire

$$\forall X > 2, \qquad \int_2^X \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) + 2\arctan(X) + \ln(3) - 2\arctan(2).$$

Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) = \ln(1) = 0$, *on en déduit que*

$$\boxed{I = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \pi + \ln(3) - 2\arctan(2)}.$$

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Etude du point fixe d'une fonction).

1. *On a*

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}=\frac{1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}((\sqrt{x})^2)-1}{x}=\frac{-\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x}=-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1),$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$*, ce qui montre que* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0)=-\frac{1}{2}$*.*

2. *La fonction* $\phi : x\mapsto \cos(\sqrt{x})-x=f(x)-x$ *est dérivable sur* $]0;1]$ *(et même en* 0 *d'après la question précédente), et* $\forall x\in\,]0;1],\ \phi'(x)=-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-1$*.*
Puisque $]0;1]\subset]0;\frac{\pi}{2}]$*, on a* $\sin(\sqrt{x})>0$ *pour tout* $x\in\,]0;1]$*, donc* $\phi'(x)<0$*.*
On en déduit que ϕ *est strictement décroissante sur* $[0;1]$*.*

3. *La fonction* ϕ *étant continue et strictement monotone sur l'intervalle* $[0;1]$*, elle définit une bijection de* $[0;1]$ *dans* $[\phi(1);\phi(0)]=[\cos(1)-1;1]$*. Vu que* $\cos(1)-1<0<1$*, le réel* 0 *possède un unique antécédent par* ϕ *: il existe donc un unique* $a\in[0;1]$ *tel que* $\phi(a)=0$*, c'est-à-dire* $f(a)=a$*.*

4. (a) *Il suffit d'étudier* $\psi : t\mapsto \sin(t)-t$*. Cette fonction est dérivable sur* $[0;1]$ *et* $\psi'(t)=\cos(t)-1\leq 0$*, donc* ψ *est décroissante sur* $[0;1]$*.*
On en déduit que $\forall t\in[0;1],\ \psi(t)\leq\psi(0)=0$*, donc* $\sin(t)\leq t$*.*

   (b) *Inégalité des accroissements finis :*
soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a;b]$ *et dérivable sur* $]a;b[$ *(avec* $a<b$*).*
Si $m\leq f'(x)\leq M$ *pour tout* $x\in]a;b[$*, alors* $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$*.*

   (c) *La fonction* f *est dérivable sur* $[0;1]$*,* $f'(x)=-\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ *si* $x\neq 0$*, et* $f'(0)=-\frac{1}{2}$*.*
Puisque $\forall x\in\,]0;1],\ 0<\sin(\sqrt{x})\leq\sqrt{x}$ *(d'après 4.(a)), on en déduit que*

$$\forall x\in]0;1],\quad |f'(x)|=\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\leq\frac{1}{2},$$

(et cette majoration reste vraie pour $x=0$ *car* $f'(0)=-\frac{1}{2}$*).*
On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à f *: étant donnés deux points* $(x,y)\in[0;1]^2$*,*

$$|f(x)-f(y)|\leq\sup_{u\in[x;y]}|f'(u)|\times|x-y|\leq\frac{1}{2}|x-y|.$$

5. (a) *On effectue une récurrence sur* n *:*

   i. *L'inégalité voulue est vraie pour* $n=0$ *car* $|u_0-a|=\left(\frac{1}{2}\right)^0|u_0-a|$*.*

   ii. *Soit* $n\in\mathbb{N}$*. Si* $|u_n-a|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-a|$*, alors par définition de la suite* (u_n) *et le fait que* $f(a)=a$*, on a* $|u_{n+1}-a|=|f(u_n)-a|=|f(u_n)-f(a)|$*.*
Mais u_n *et* a *sont dans* $[0;1]$ *(puisque* $u_0=0$ *et* $f([0;1])\subset[0;1]$*), donc d'après l'inégalité montrée à la question précédente, on a*

$$|u_{n+1}-a|\leq\frac{1}{2}|u_n-a|\leq\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-a|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-a|.$$

La propriété est donc héréditaire.

   (b) *Vu que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$*, l'inégalité précédente montre que* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-a|=0$*, donc la suite* (u_n) *converge vers* a *(le point fixe de* f*).*

* * *

Corrigé de l'exercice 3 (Fonction Beta d'Euler).

1. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)+(y-1)\ln(1-t)}$ est continue sur $]0;1/2]$, donc $\int_0^{1/2} g(t)dt$ est impropre en 0. En outre, $g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$, donc* $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{1/2} g(t)dt \text{ converge si et seulement si } x > 0}$.

2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)+(y-1)\ln(1-t)}$ est continue sur $[1/2;1[$, donc $\int_{1/2}^1 g(t)dt$ est impropre en 1. En effectuant le changement de variable généralisé $u = 1-t$, on obtient (sous réserve de convergence) :*

$$\int_{1/2}^1 g(t)dt = \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{1/2} (1-u)^{x-1}u^{y-1}du = \int_0^{1/2} u^{y-1}(1-u)^{x-1}du.$$

D'après la question précédente, cette dernière intégrale converge si et seulement si $y > 0$.
Donc $\boxed{\int_{1/2}^1 g(t)dt \text{ converge si et seulement si } y > 0}$.

3. *L'intégrale doublement impropre $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ convergent. D'après les deux questions précédentes, cela a lieu si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. L'ensemble cherché est donc* $\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}}$.

4. *Cela se fait en deux temps. Fixons $(x,y) \in D$.*
   - *Tout d'abord, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)+(y-1)\ln(1-t)}$ est positive sur l'intervalle $]0;1[$, donc $\boxed{B(x,y) \geq 0}$ (par positivité de l'intégrale impropre).*
   - *Supposons par l'absurde que $B(x,y) = 0$. Puisque $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0;1[$, cela entraînerait la nullité de cette fonction sur tout l'intervalle $]0;1[$, ce qui est faux (cette fonction ne s'annule même pas en fait). Donc $\boxed{B(x,y) > 0}$.*

5. *Fixons $(x,y) \in D$. On effectue le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale impropre convergente $B(x,y)$:*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = B(y,x).$$

On a donc bien $\boxed{B(x,y) = B(y,x)}$.

6. (a) *Fixons deux réels ε et A tels que $0 < \varepsilon < A < 1$. En intégrant par parties, on a*

$$\int_\varepsilon^A t^x(1-t)^{y-1}dt = -\frac{A^x(1-A)^y}{y} + \frac{\varepsilon^x(1-\varepsilon)^y}{y} + \frac{x}{y}\int_\varepsilon^A t^{x-1}(1-t)^y dt.$$

On fait alors tendre $\varepsilon \to 0^+$: puisque $x > 0$, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^x(1-\varepsilon)^y}{y} = 0$, donc

$$\int_0^A t^x(1-t)^{y-1}dt = -\frac{A^x(1-A)^y}{y} + \frac{x}{y}\int_0^A t^{x-1}(1-t)^y dt$$

(les deux intégrales convergent puisque $x > 0$).
Enfin, on fait tendre $A \to 1^-$: puisque $y > 0$, on a $\lim\limits_{A\to 1^-} -\frac{A^x(1-A)^y}{y} = 0$, donc

$$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt,$$

c'est-à-dire $\boxed{B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)}$.

(b) *Par linéarité de l'intégrale impropre convergente, on a*

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt,$$

d'où la formule $\boxed{B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)}$.

(c) *En utilisant les formules obtenues dans les deux questions précédentes, on a*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1) = \frac{x}{y}(B(x,y) - B(x+1,y)),$$

et donc

$$B(x+1,y) \times \left(1 + \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}B(x,y),$$

ce qui donne $\boxed{B(x+1,y) = \frac{y}{y+x} \times \frac{x}{y}B(x,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)}$.

7. *Fixons* $x > 0$. *Montrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $B(n+1,x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

- *C'est vrai pour* $n = 0$ *car* $B(1,x) = B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\frac{t^x}{x}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} = \dfrac{0!}{\prod_{k=0}^{0}(x+k)}$.

- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $B(n+1,x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$, *alors d'après la formule établie en 9.(c), nous avons :*

$$B(n+2,x) = \frac{n+1}{n+1+x}B(n+1,x) = \frac{n+1}{n+1+x} \times \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(x+k)},$$

donc la propriété est héréditaire.

Le théorème de récurrence permet alors de conclure que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B(n+1,x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}}$.

* * *

Corrigé de l'exercice 4 (Calcul de l'intégrale de Gauss).

1. (a) *On sait par les théorèmes de croissances comparées que* $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^{t^2}} = 0$, *donc par définition de la limite, il existe* $t_0 > 0$ *tel que*

$$t \geq t_0 \implies \frac{t^2}{e^{t^2}} \leq 1 \implies e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

(b) *La fonction* $t \mapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $[0;+\infty[$, *et on a* $0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ *au voisinage de* $+\infty$. *Vu que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge, on en déduit par le critère de comparaison que* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *converge.*
Enfin, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ *est paire, donc on déduit de ce qui précède que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *converge.*

2. (a) *Soit* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. *On effectue le changement de variable* $u = -t$ *dans l'intégrale* $A_{p,q}$. *On obtient :*

$$A_{p,q} = \int_{-1}^{1}(1-t)^p(1+t)^q\mathrm{d}t = -\int_{1}^{-1}(1+u)^p(1-u)^q\mathrm{d}u = \int_{-1}^{1}(1+u)^p(1-u)^q\mathrm{d}u = A_{q,p}.$$

(b) *Soit* $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. *On effectue une intégration par parties dans l'intégrale* $A_{p,q}$ *:*

$$A_{p,q} = \int_{-1}^{1}(1-t)^p(1+t)^q\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}(1+t)^q\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } q \geq 1} + \int_{-1}^{1}\frac{q}{p+1}(1-t)^{p+1}(1+t)^{q-1}\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $A_{p,q} = \frac{q}{p+1}A_{p+1,q-1}$.

(c) *On conjecture facilement la formule :*

$$A_{p,q} = \frac{q}{p+1}A_{p+1,q-1} = \frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}A_{p+2,q-2} = \cdots = \frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}A_{p+q,0},$$

c'est-à-dire $A_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q)!}A_{p+q,0}$.

Démontrons donc (par récurrence sur p) que pour tout $p\in\mathbb{N}$ et pour tout $q\in\mathbb{N}$, on a

$$A_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q)!}A_{p+q,0}.$$

— *C'est clair pour $p=0$, car pour tout $q\in\mathbb{N}$, $A_{p,q} = A_{0,q} = A_{q,0} = \frac{0!q!}{(0+q)!}A_{0+q,0}$.*

— *Soit $p\in\mathbb{N}$. Si on a $A_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q)!}A_{p+q,0}$ pour tout $q\in\mathbb{N}$, alors d'après la relation de récurrence obtenue à la question précédente, on a $A_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1}A_{p,q+1}$, donc*

$$A_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1}\times\frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}A_{p+q+1,0} = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}A_{p+1+q,0},$$

ce qui montre que la propriété étudiée est héréditaire.

(d) *Enfin, on a $A_{p+q,0} = \int_{-1}^{1}(1-t)^{p+q}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p+q+1}(1-t)^{p+q+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^{p+q+1}}{p+q+1}$, donc en conclusion*

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\qquad A_{p,q} = \frac{2^{p+q+1}p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. (a) *Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. En outre, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$ converge (puisque $2n>1$), donc d'après le critère des équivalents, on en déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge, et donc que l'intégrale $B_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ est convergente.*

(b) *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a*

$$B_{n+1} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t$$

On effectue ensuite une intégration par parties pour modifier l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$. Pour tout $x>0$, on a

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x t\times \underbrace{t(1+t^2)^{-n-1}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2n}(1+t^2)^{-n}\right)}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{2n}(1+t^2)^{-n}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2n}(1+t^2)^{-n}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = -\frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\int_0^x\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre $x\to+\infty$, on obtient que $\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge, et

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}B_n.$$

On en déduit finalement la relation :

$$B_{n+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = B_n - \frac{1}{2n}B_n,$$

soit $B_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}B_n$.

(c) *La relation précédemment obtenue permet de conjecturer une expression de B_n :*

$$B_n = \frac{2n-3}{2n-2}B_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}B_1 = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)^2(2n-4)^2 \cdots 2^2}B_1,$$

c'est-à-dire

$$B_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}B_1 = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
— *C'est évident pour $n = 1$ car $B_1 = \frac{\pi}{2}$.*
— *Pour $n \in \mathbb{N}^*$: si $B_n = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$, alors*

$$B_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{2n(2n-1)}{(2n)^2} \times \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.

4. (a) *Il suffit d'étudier le signe de la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$ (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$). On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = e^t - 1,$$

Donc φ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) \geq \varphi(0) = 0,$$

ce qui montre que φ est positive. D'où l'inégalité voulue.

(b) *Soit $x \in [0; 1]$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = x^2$, on obtient*

$$e^{x^2} \geq 1 + x^2,$$

c'est-à-dire, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$:

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

De même, en appliquant l'inégalité précédente à $t = -x^2$, on obtient

$$e^{-x^2} \geq 1 - x^2.$$

D'où l'encadrement voulu :

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) *Par croissance de la fonction puissance n sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la question précédente :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; 1], \qquad (1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

On intègre ensuite cette inégalité sur $[0; 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{-nx^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x.$$

(d) *Le membre de gauche de l'inégalité établie à la question précédente est (par parité) :*

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x)^n(1+x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2}A_{n,n}.$$

L'intégrale au centre se transforme par changement de variable : en posant $t = \sqrt{n}x$, on obtient

$$\int_0^1 e^{-nx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Quant à l'intégrale de droite, on peut la majorer :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x = B_n.$$

Tout ceci amène l'inégalité :

$$\frac{1}{2}A_{n,n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leq B_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{n}}{2}A_{n,n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}B_n.$$

(e) *Il ne reste plus qu'à passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente. On utilise pour cela les formules des $A_{p,q}$ et des B_n trouvées dans les parties 2. et 3. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ \\ B_n = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \end{array} \right. .$$

A l'aide de la formule de Stirling, on obtient

$$A_{n,n} \sim \frac{2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}}e,$$

donc $A_{n,n} \sim e\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = e^{1+(2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
D'autre part,

$$B_n \sim \frac{\pi(2n-2)^{2n-2}e^{-2n+2}\sqrt{2\pi(2n-2)}}{2^{2n-1}(n-1)^{2n-2}e^{-2n+2}2\pi(n-1)} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2(n-1)},$$

donc $B_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
Ces équivalents montrent que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2}A_{n,n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}B_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

donc par le théorème des gendarmes, on déduit de l'encadrement de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ *converge, on en déduit :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

puis par parité :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$