DS4 du 23/11/19 (4h) - Sujet A
Fonctions réelles, complexes et intégration

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (Echauffement).
Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'intégrale $I = \int_2^{+\infty} \frac{4x^2}{x^4-1} dx$ converge **sans la calculer**.
   (b) Calculer I.
   Indication : on commencera par réécrire $\frac{4x^2}{x^4-1}$ *sous la forme* $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$.
2. En utilisant une somme de Riemann, Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n+k)^2}$.

* * *

Exercice 2 (Etude du point fixe d'une fonction).
On note $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}).$$

1. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Déterminer la monotonie sur $[0;1]$ de la fonction $\phi : x \mapsto \cos(\sqrt{x}) - x$.
3. Montrer que la fonction f possède un unique point fixe a dans $[0;1]$ (c'est-à-dire qu'il existe un unique $a \in [0;1]$ tel que $f(a) = a$).
4. (a) Montrer que $\forall t \in [0;1],\ \sin(t) \leq t$.
   Indication : on pourra étudier une fonction bien choisie.
   (b) Rappeler l'inégalité des accroissements finis.
   (c) En déduire que
   $$\forall (x;y) \in [0;1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$
5. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - a|.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

* * *

Exercice 3 (Fonction Beta d'Euler).
On étudie ici une intégrale dépendant de deux paramètres réels x et y. La variable d'intégration est notée t.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $y > 0$.
3. En déduire l'ensemble D des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'intégrale

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

   converge. *Cela définit donc une fonction $B : D \to \mathbb{R}$ appelée "fonction Beta".*
4. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in D$, on a $B(x, y) > 0$.
5. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in D$, on a $B(x, y) = B(y, x)$.
   On pourra effectuer un changement de variable.
6. Soit $(x, y) \in D$.
   (a) En déduire que $B(x+1, y) = \dfrac{x}{y}B(x, y+1)$.
   On effectuera une intégration par parties en se ramenant à un segment $[\varepsilon; A]$ avec $0 < \varepsilon < A < 1$.
   (b) Montrer que $B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y)$.
   (c) En déduire enfin que $B(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}B(x, y)$.
7. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x > 0$, on a

$$B(n+1, x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

* * *

Exercice 4 (Calcul de l'intégrale de Gauss).
On considère l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Le but de cet exercice est de calculer I, sans passer par les primitives de $t \mapsto e^{-t^2}$ (qui hélas sont impossibles à expliciter). Pour cela, on va procéder par encadrements. On considère les suites :

$$A_{p,q} = \int_{-1}^{1} (1-t)^p(1+t)^q\mathrm{d}t \quad (\text{où } (p,q) \in \mathbb{N}^2), \qquad B_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*).$$

1. **Convergence de l'intégrale I :**
   (a) Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t \geq t_0, \quad e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

   (b) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
2. **Calcul des $A_{p,q}$:**
   (a) Montrer que $A_{p,q} = A_{q,p}$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$..
   (b) Trouver une relation entre $A_{p,q}$ et $A_{p+1,q-1}$, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
   Indication : on pourra intégrer par parties.

(c) En déduire que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q)!} A_{p+q,0}.$$

(d) Finalement, calculer $A_{p,q}$ en fonction de p, q.

3. **Calcul des B_n :**

(a) Justifier la convergence de l'intégrale B_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} B_n.$$

Indication : on pourra écrire $1 = 1 + t^2 - t^2$ et intégrer par parties.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

4. **Calcul de I :**

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^t \geq t + 1.$$

Indication : on pourra étudier une fonction bien choisie.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{-nx^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x.$$

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sqrt{n}}{2} A_{n,n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\, B_n.$$

(e) En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, puis de I.

On pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

* * *