Corrigé du DS3 du 04/11/19 (4h) - Concours blanc

Première partie (2h) : programme de TSI 2

Corrigé de l'exercice 1 (Quelques séries).

1. *Puisque* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *on a* $\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. *Cet équivalent étant positif, on peut en conclure par le critère des équivalents que la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ *est de même nature que la série de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$, *donc convergente (puisque* $3 > 1$*).*
2. *En notant* S_n *la somme partielle de rang* n *de la série étudiée, on a, pour tout entier* $n \geq 2$ *:*
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)) = -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
(par changements d'indices et téléscopage).
En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, *on en déduit* $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.
3. *On utilise le critère de d'Alembert dans les cas où le terme général est strictement positif, c'est-à-dire quand* $a > 0$ *: en notant* $u_n = \frac{a^n}{n^2}$ *pour tout* $n \geq 1$, *on a*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{an^2}{(n+1)^2} = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$$
Donc la série converge si $a \in]0;1[$ *et diverge (grossièrement) si* $a \in]1;+\infty[$.
Reste à traiter les cas $a = 0$ *et* $a = 1$, *qui sont triviaux car si* $a = 0$, *la série converge (puisque le terme général est nul), et si* $a = 1$, *on a affaire à la série de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, *qui converge.*
Finalement, la série étudiée converge si et seulement si $a \in [0;1]$.

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Sous-espaces stables).

Partie I

1. *Le polynôme caractéristique de* φ *est*
$$\chi_\varphi(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -X & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix},$$
(en effectuant successivement $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ *puis* $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$*), donc en développant par rapport à la troisième ligne :*
$$\chi_\varphi(X) = X \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2).$$
Les valeurs propres de φ *sont les racines de* χ_φ, *donc les valeurs propres de* φ *sont* 0, 1 *et* 2.
2. *Les sous-espaces propres de* φ *sont :*
   - $E_0(\varphi) = Ker(\varphi) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ z=0 \end{array}\right.\right\} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
   - $E_1(\varphi) = Ker(\varphi - Id) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{c} y=z \\ x=-z \end{array}\right.\right\} = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- $E_2(\varphi) = Ker(\varphi - 2Id) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right. \right\} = Vect \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Puisque ces trois sous-espaces propres sont en somme directe (d'après le cours), la famille $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille libre de 3 vecteurs. Vu que* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$*, on en déduit que* $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres pour* φ*.*

3. *Soit* $\overrightarrow{u} \in \mathcal{D}_1 = Vect(\overrightarrow{c_1})$*. Il existe un réel* α *tel que* $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{c_1}$*. On a alors, par linéarité de* φ *:*

$$\varphi(\overrightarrow{u}) = \alpha \varphi(\overrightarrow{c_1}) = \overrightarrow{0},$$

car $\overrightarrow{c_1} \in E_0(\varphi) = Ker(\varphi)$*.*
Puisque le vecteur nul est aussi dans $\mathcal{D}_1$*, on en déduit que* $\varphi(\overrightarrow{u}) \in \mathcal{D}_1$*, donc la droite* $\mathcal{D}_1$ *est stable par l'endomorphisme* φ*.*

4. *Soit* $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}_1 = Vect(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$*. Il existe deux réels* α, β *tels que* $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{c_2} + \beta \overrightarrow{c_3}$*. On a alors, par linéarité de* φ *:*

$$\varphi(\overrightarrow{u}) = \alpha \underbrace{\varphi(\overrightarrow{c_2})}_{=\overrightarrow{c_2}} + \beta \underbrace{\varphi(\overrightarrow{c_3})}_{=2\overrightarrow{c_3}} = \alpha \overrightarrow{c_2} + 2\beta \overrightarrow{c_3}$$

(puisque $\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}$ *sont des vecteurs propres de* φ *associés aux valeurs propres* 1 *et* 2*).*
Le vecteur $\varphi(\overrightarrow{u})$ *est combinaison linéaire de* $\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}$*, donc* $\varphi(\overrightarrow{u}) \in \mathcal{P}_1$*.*
Ainsi, le plan $\mathcal{P}_1$ *est donc stable par l'endomorphisme* φ*.*

Partie II

5. *On a* $A_f \times A_g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A_g \times A_f$*, ce qui montre que* $f \circ g = g \circ f$*.*

6. *Pour montrer que* 1 *est valeur propre de* f*, on calcule* $Ker(f - Id)$ *:*

$$Ker(f - Id) = Ker(A_f - I_3) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a $Ker(f - Id) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*, donc* 1 *est valeur propre de* f*, et les vecteurs propres associés sont les* $(x, x, 0)$ *avec* $x \in \mathbb{R}^*$ *(attention, on rappelle qu'un vecteur propre est non nul).*

7. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$g \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que tout vecteur propre de f *associé à la valeur propre* 1 *est un vecteur propre de* g *associé à la valeur propre* 1*.*

8. *On procède comme en 6. :*

$$Ker(f + Id) = Ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ y = -x\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ce sous-espace vectoriel étant non nul, on en déduit que -1 *est valeur propre de* f*, et*

$$E_{-1}(f) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

9. *Montrons enfin que le plan $E_{-1}(f)$ est stable par g :*

si $\overrightarrow{u} \in Ker(f+Id)$, alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ avec x, z réels. D'où :

$$g(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2x \\ z \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $g(\overrightarrow{u})$ vérifie donc l'équation du plan $Ker(f+Id)$ (puisque $2x-2x=0$).
On a donc montré ($\overrightarrow{u} \in Ker(f+Id) \implies g(\overrightarrow{u}) \in Ker(f+Id)$), c'est-à-dire que le sous-espace propre $E_{-1}(f) = Ker(f+Id)$ est stable par g.

10. *On cherche des vecteurs propres communs à f et g. Pour cela, on réutilise les calculs faits dans les questions $6, 7, 8, 9$, où l'on a montré que 1 et -1 étaient valeurs propres de f.*
    - *le vecteur $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$ forme une base de $E_1(f)$, donc vérifie $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$. De plus, c'est un vecteur propre pour g car $g(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$.*
    - *les vecteurs $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (0,0,1)$ forment une base de $E_{-1}(f)$, donc vérifient $f(\overrightarrow{u_2}) = -\overrightarrow{u_2}$ et $f(\overrightarrow{u_3}) = -\overrightarrow{u_3}$. De plus, ce sont des vecteurs propres pour g car $g(\overrightarrow{u_2}) = 2\overrightarrow{u_2}$ et $g(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{u_3}$.*
    - *Puisque $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont en somme directe (des sous-espaces propres distincts d'un même endomorphisme sont toujours en somme directe), la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres communs à f et g. Il s'agit donc d'une base qui diagonalise à la fois f et g.*

    La base $\mathcal{B}_{f,g} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ convient donc et on a

$$D_f = Mat_{\mathcal{B}_{f,g}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D_g = Mat_{\mathcal{B}_{f,g}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

11. *Le polynôme caractéristique de ϕ est*

$$\chi_\phi(X) = \det(XI_3 - A_\phi) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix},$$

donc en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\chi_\phi(X) = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\left((X-1)^2+1\right).$$

Le polynôme $(X-1)^2+1$ n'a pas de racine réelle (il est à valeurs strictement positives), donc le polynôme caractéristique χ_ϕ n'est pas scindé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce qui montre que l'endomorphisme ϕ n'est pas diagonalisable.

Remarque.
Si on considérait ϕ comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ (et donc A_ϕ serait considérée comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$), alors ϕ serait diagonalisable, car $\chi_\phi(X) = (X-2)(X-1+i)(X-1-i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

12. $\boxed{\Rightarrow}$ *Si $\mathcal{D} = Vect(\overrightarrow{u})$ est stable par ϕ, alors le vecteur $\phi(u)$ est dans $\mathcal{D}$ (car $\overrightarrow{u} \in \mathcal{D}$), donc il existe un réel λ tel que $\phi(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$, ce qui montre que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de ϕ.*

    $\boxed{\Leftarrow}$ *Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de ϕ, alors il existe un réel λ tel que $\phi(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$. Montrons alors que $\phi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$: étant donné un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathcal{D}$, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$, donc $\phi(\overrightarrow{v}) = \alpha\phi(\overrightarrow{u}) = \alpha(\lambda\overrightarrow{u}) = (\alpha\lambda)\overrightarrow{u}$, ce qui montre que $\phi(\overrightarrow{v}) \in \mathcal{D}$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est stable par ϕ.*

    On a donc montré l'équivalence voulue.

13. *On déduit de la question précédente que ϕ possède une seule droite stable, il s'agit de son unique sous-espace propre, c'est-à-dire la droite :*

$$\mathcal{D} = E_2(\phi) = Ker(A_\phi - 2I_3) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. *Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Puisque $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$, on a*

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

donc par définition du plan $\mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{u} \in \mathcal{P} \iff \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}.$$

15. *L'endomorphisme ϕ^* est bijectif (comme ϕ), car*

$$\det(\phi^*) = \det(A_\phi^T) = \det(A_\phi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

En particulier ϕ^* est injectif, donc $Ker(\phi^*) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Si $\phi^*(\overrightarrow{n}) = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{n} \in Ker(\phi^*) = \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui est contradictoire puisque $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ par hypothèse. Donc $\phi^*(\overrightarrow{n}) \neq \overrightarrow{0}$.

16. *En notant $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$, les coordonnées de $\phi(\overrightarrow{u})$ dans la base canonique sont données par le produit matriciel*

$$A_\phi \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix},$$

donc

$$\phi(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = (x+y)x' + (-x+2y+z)y' + (x+z)z',$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\phi(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = x(x'-y'+z') + y(x'+2y') + z(y'+z'),$$

et on reconnaît le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \phi^*(\overrightarrow{v})$, car les coordonnées de $\phi^*(\overrightarrow{v})$ dans la base canonique sont données par

$$A_\phi^T \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-y'+z' \\ x'+2y' \\ y'+z' \end{pmatrix}.$$

On a donc bien $\phi(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \phi^*(\overrightarrow{v})$.

17. *Soit $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$. D'après la question précédente, on a*

$$\phi^*(\overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} \cdot \phi(\overrightarrow{u})$$

Mais vu que $\mathcal{P}$ est stable par ϕ, on a aussi $\phi(\overrightarrow{u}) \in \mathcal{P}$, donc d'après la question 11,

$$\overrightarrow{n} \cdot \phi(\overrightarrow{u}) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\phi^*(\overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

En conclusion, le vecteur (non nul) $\phi^*(\overrightarrow{n})$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$, c'est donc bien un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

18. *Vu que $\phi^*(\overrightarrow{n})$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, il est nécessairement colinéaire à $\overrightarrow{n}$ (qui est lui aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}$). Il existe donc un réel λ tel que $\phi^*(\overrightarrow{n}) = \lambda\overrightarrow{n}$, ce qui montre bien que le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est un vecteur propre de l'endomorphisme ϕ^*.*

19. *On procède par analyse-synthèse :*
    - *Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel stable par ϕ. Notons $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. D'après la question 18., le vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ϕ^*, donc un vecteur propre de la matrice A_ϕ^T.*
    En outre, on a
    $$\chi_{A_\phi^T}(X) = \chi_{A_\phi}(X) = (X-2)\left((X-1)^2+1\right),$$
    donc A_ϕ^T ne possède qu'une valeur propre réelle : $\lambda = 2$, et les vecteurs propres associés sont les éléments non nuls de
    $$Ker(A_\phi^T - 2I_3) = Ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right\} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
    On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est colinéaire à $(0,1,1)$, et donc il y a au plus un plan vectoriel stable par ϕ : le plan vectoriel normal à $(0,1,1)$, c'est-à-dire le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y + z = 0$.

    - *On vérifie à la main que le plan $\mathcal{P} : \ y + z = 0$ est bien stable par ϕ : si $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{u}$ est de la forme $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ (avec x, y réels), donc*
    $$\phi(\overrightarrow{u}) = A_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ x-y \end{pmatrix},$$
    et ce vecteur vérifie bien l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ (à savoir $y + z = 0$), donc $\phi(\overrightarrow{u}) \in \mathcal{P}$.

    On a donc prouvé qu'il existe un seul plan vectoriel stable par ϕ, ayant pour équation cartésienne $y + z = 0$.

* * *

Seconde partie (2h) : programme de TSI 1

Corrigé de l'exercice 3 (Probabilités).

1. *Un tirage simultané de trois boules parmi huit boules est une partie à 3 éléments d'un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{8}{3} = \frac{8*7*6}{3*2*1} = 56$.*
2. *Dans la suite, on notera Ω l'ensemble des tirages possibles. Vu que ces tirages sont équiprobables, la probabilité d'un événement E est*
   $$\mathbb{P}(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}.$$
   (a) *L'événement E_1 est l'ensemble des tirages comportant l'unique V, donc l'ensemble des parties de la forme $\{V, X, Y\}$, où X, Y sont 2 lettres choisies parmi les 7 qui ne sont pas un V. On a donc*
   $$Card(E_1) = \binom{1}{1} * \binom{7}{2} = \frac{7*6}{2*1} = 21,$$
   ce qui amène
   $$\mathbb{P}(E_1) = \frac{Card(E_1)}{Card(\Omega)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$
   (b) *Passons par l'événement contraire $\overline{E_2}$: "n'obtenir aucun A". Il s'agit de l'ensemble des parties $\{X, Y, Z\}$, où les trois lettres sont choisies parmi les 6 qui ne sont pas un A. On a donc*
   $$Card(\overline{E_2}) = \binom{6}{3} = \frac{6*5*4}{3*2*1} = 20, \qquad \mathbb{P}(E_2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E_2}) = 1 - \frac{20}{56} = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

(c) *L'événement E_3 est l'ensemble des parties de la forme $\{A, A, X\}$, où X est une lettre choisie parmi les 6 qui ne sont pas un A. On a donc*

$$Card(E_3) = \binom{2}{2} * \binom{6}{1} = 6, \qquad \mathbb{P}(E_3) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

(d) *On a la réunion disjointe $E_4 = E_3 \cup E_3'$, où E_3' est l'ensemble des tirages comportant deux C. On a $Card(E_3') = Card(E_3)$ (les lettres A et C jouent des rôles symétriques), donc*

$$\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_3') = 2\mathbb{P}(E_3) = \frac{3}{14}.$$

(e) *L'événement E_5 est l'événement contraire de E_4 (puisqu'on ne peut pas obtenir 3 lettres identiques, vu la composition du mot VACANCES). On a donc*

$$\mathbb{P}(E_5) = 1 - \mathbb{P}(E_4) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}.$$

3. *Par définition, la probabilité conditionnelle de E_4 sachant E_2 est :*

$$\mathbb{P}_{E_2}(E_4) = \frac{\mathbb{P}(E_4 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}.$$

L'intersection $E_4 \cap E_2$ est l'ensemble des tirages comportant au moins un A et deux lettres identiques, donc on a la réunion disjointe $E_4 \cap E_2 = E_3 \cup E_6$, où E_6 est l'ensemble des tirages comportant un A et deux C.
On a facilement $Card(E_6) = \binom{2}{1} \times \binom{2}{2} = 2$, donc

$$Card(E_4 \cap E_2) = Card(E_3) + Card(E_6) = 6 + 2 = 8, \qquad \mathbb{P}(E_4 \cap E_2) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}_{E_2}(E_4) = \frac{1/7}{9/14} = \frac{2}{9}.$$

4. *Par définition, les événements E_2 et E_4 sont indépendants ssi $\mathbb{P}(E_2 \cap E_4) = \mathbb{P}(E_2) \times \mathbb{P}(E_4)$, ce qui revient à $\mathbb{P}_{E_2}(E_4) = \mathbb{P}(E_4)$.*
Ici, on a $\mathbb{P}_{E_2}(E_4) = \frac{2}{9} \neq \frac{3}{14} = \mathbb{P}(E_4)$, donc les événements E_2 et E_4 ne sont pas indépendants.

* * *

Corrigé de l'exercice 4 (Nombres complexes).

1. (a) *On cherche z sous la forme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors*

$$z^2 = 15 + 8i \iff (x + iy)^2 = 15 + 8i \iff (x^2 - y^2) + 2ixy = 15 + 8i.$$

De plus, si on calcule les modules, on a

$$|z|^2 = |15 + 8i| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Donc

$$z^2 = 15 + 8i \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 = 16 \\ xy = 4 \\ y^2 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} (x, y) = (4, 1) \\ ou \\ (x, y) = (-4, -1) \end{array} \right. .$$

L'équation proposée a donc deux solutions : $4 + i$ et $-4 - i$.

(b) *L'équation est bicarrée (de degré 4 avec des exposants pairs) : on pose $Z = z^2$.*
On a alors

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0 \iff Z^2 - 30Z + 289 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en Z vaut

$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 289 = 4 \times (15^2 - 289) = 4 \times (225 - 289) = 4 \times (-64) = -2^2 \times 8^2 = -16^2.$

En posant $\delta = 16i$, on a donc $\delta^2 = \Delta$, et donc

$$Z^2 - 30Z + 289 = 0 \iff Z = \frac{30 \pm \delta}{2} \iff Z = 15 \pm 8i.$$

Reste à résoudre en z : tout d'abord, on a

$$Z = 15 + 8i \iff z^2 = 15 + 8i \iff z \in \{4 + i, -4 - i\},$$

d'après la question précédente.
Enfin, inutile de calculer pour résoudre $z^2 = 15 - 8i$, car on a (puisque la conjugaison complexe est une bijection) :

$$z^2 = 15-8i \iff \overline{z^2} = 15+8i \iff \overline{z}^2 = 15+8i \iff \overline{z} \in \{4+i, -4-i\} \iff z \in \{4-i, -4+i\}.$$

Finalement, l'équation proposée a quatre solutions complexes :

$$4 + i, 4 - i, -4 + i, -4 - i.$$

2. (a) *On a $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, donc, par unicité de la forme algébrique, on obtient :*

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(b) *Puisqu'on suppose $x = Re(z) > 0$, on a $\cos\theta > 0$, donc $\tan(\theta)$ existe et d'après la question précédente :*

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}.$$

Vu que $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ *est une bijection et que $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ (puisque $\cos\theta > 0$), on en déduit*

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(c) *Si on suppose seulement $Re(z) \neq 0$, alors on a toujours $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, mais pas $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $\theta \notin]-\pi/2, \pi/2[$.*
Par exemple, si $z = -1 + i$, on a $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$, et pourtant :

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \neq \theta,$$

donc la formule de la question (b) n'est pas vraie pour tout z tel que $Re(z) \neq 0$.

(d) *Puisque $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, on a $\theta \in]-\pi, \pi[$ donc $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, d'où $\tan(\theta/2)$ existe. De plus :*

$$\cos\theta = \cos\left(2 * \frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1,$$

$$\sin\theta = \sin\left(2 * \frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

donc

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

ce qui montre l'égalité voulue.

(e) *Puisque $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a*

$$\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right),$$

et donc finalement

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

* * *

Corrigé de l'exercice 5 (Polynômes).

1. (a) *On a l'équivalence : x_0 est une racine de P de multiplicité ≥ 2 si et seulement si*

$$P(x_0) = P'(x_0) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \\ 3x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0 \end{cases}.$$

(b) *Supposons que P possède une racine de multiplicité ≥ 2, notée $x_0 \in \mathbb{C}$. On a alors, d'après la question précédente,*

$$\begin{cases} (E_1) & x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \\ (E_2) & 3x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0 \end{cases}.$$

Ceci implique

$$(E_3) := (2E_1 - E_2) \qquad 2x_0^3 - x_0^2 + 2x_0 = 0.$$

On a $x_0 \neq 0$ (car 0 n'est pas solution du système), donc, en simplifiant par x_0, on obtient

$$(E_3) \iff 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0.$$

Ceci entraîne encore

$$(E_2 - E_3) \qquad x_0^2 + 3x_0 = 0,$$

c'est-à-dire (puisque $x_0 \neq 0$) :

$$x_0 = -3.$$

Mais ceci contredit l'équation (E_2), donc un tel x_0 ne peut exister, ce qui prouve que toutes les racines complexes de P sont de multiplicité 1.

(c) *Puisque a, b, c sont les racines de P et puisque le coefficient dominant de P vaut 1, on a la factorisation :*

$$P = (X-a)(X-b)(X-c).$$

En développant ceci, on obtient :

$$P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - (abc) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3.$$

En identifiant les coefficients de $P = X^3 + X^2 + 2X + 1$, on obtient donc les valeurs demandées :

$$\sigma_1 = -1, \qquad \sigma_2 = 2, \qquad \sigma_3 = -1.$$

(d) *On a $\sigma_1^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, d'où la formule :*

$$S = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = (-1)^2 - 2 \times 2 = -3.$$

(e)

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccc}
X^7 & & & & & & & X^3 & +X^2 & +2X & +1 & \\
X^7 & +X^6 & +2X^5 & +X^4 & & & & X^4 & -X^3 & -X^2 & +2X & +1 \\
\hline
 & -X^6 & -2X^5 & -X^4 & & & & & & & & \\
 & -X^6 & -X^5 & -2X^4 & -X^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & -X^5 & +X^4 & +X^3 & & & & & & & \\
 & & -X^5 & -X^4 & -2X^3 & -X^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & 2X^4 & +3X^3 & +X^2 & & & & & & \\
 & & & 2X^4 & +2X^3 & +4X^2 & +2X & & & & & \\
\hline
 & & & & X^3 & -3X^2 & -2X & & & & & \\
 & & & & X^3 & +X^2 & +2X & +1 & & & & \\
\hline
 & & & & & -4X^2 & -4X & -1 & & & &
\end{array}
$$

On obtient un quotient égal à $Q = X^4 - X^3 - X^2 + 2X + 1$ *et un reste égal à* $R = -4X^2 - 4X - 1$.

(f) D'après la question précédente, on a

$$X^7 = P(X)Q(X) + R(X).$$

En évaluant en $X = a$, *il vient :*

$$a^7 = P(a)Q(a) + R(a) = R(a),$$

car $P(a) = 0$ *(vu que* a *est racine de* P*).*
De même, on a :

$$b^7 = R(b), \qquad c^7 = R(c).$$

Donc

$$T = R(a) + R(b) + R(c) = -4a^2 - 4a - 1 - 4b^2 - 4b - 1 - 4c^2 - 4c - 1,$$

ce qui se réécrit

$$T = -4(a^2 + b^2 + c^2) - 4(a + b + c) - 3.$$

On a donc

$$T = -4S - 4\sigma_1 - 3 = -4 \times (-3) - 4 \times (-1) - 3 = 12 + 4 - 3,$$

c'est-à-dire

$$T = 13.$$

2. (a) Cherchons les racines de $X^6 - 1$ *sous la forme* $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \geq 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$z^6 = 1 \iff \rho^6 e^{i6\theta} = 1 \iff \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0\ [\frac{\pi}{3}] \end{cases}.$$

On en déduit que les racines de $X^6 - 1$ *sont les* $z = e^{i\frac{k\pi}{3}}$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
Par périodicité de la suite $k \mapsto e^{i\frac{k\pi}{3}}$, *il y a en fait six racines distinctes :*

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, \qquad k \in \{0, \cdots, 5\}.$$

Graphiquement, les racines de $X^6 - 1$ *forment les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre* O *et de rayon* 1.

(b) La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ *de* P *est*

$$P = \prod_{k=0}^{5}(X - z_k) = (X-1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{2i\pi/3})(X+1)(X - e^{-2i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}).$$

Pour obtenir la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, *on conserve les facteurs réels, et on regroupe les facteurs non réels qui correspondent aux paires de racines conjuguées :*

$$(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) = X^2 - 2Re(e^{i\pi/3})X + |e^{i\pi/3}|^2 = X^2 - X + 1,$$

$$(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}) = X^2 - 2Re(e^{2i\pi/3})X + |e^{2i\pi/3}|^2 = X^2 + X + 1.$$

Finalement, la factorisation cherchée est

$$P = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

* * *

Corrigé de l'exercice 6 (Une étude de fonction).

1.
- *Déjà, f est continue en tout point de $I \setminus \{0\}$ (en tant que quotient de deux fonctions continues).*
- *Montrons que f est continue en 0, c'est-à-dire que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0)$. Pour cela, on utilise le développement limité :*

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2) = 2x - 2x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2),$$

donc

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad f(x) = 1 - 2x + \underset{x \to 0}{o}(x).$$

Vu que $2x + \underset{x \to 0}{o}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ on en déduit que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$, ce qui prouve que f est continue en 0.

On en déduit que f est continue en tout point de I, ce qu'il fallait montrer.

2. On donne deux méthodes :
- **Première méthode :** *On passe par le taux d'accroissement : pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2}{x} = \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{x^2} = -2,$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$, ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.
- **Seconde méthode :** *On a montré à la première question que f possède un développement limité à l'ordre 1 (car $f(x) = 1 - 2x + \underset{x \to 0}{o}(x)$), ce qui prouve la dérivabilité en 0. De plus, le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient du x, donc on a $f'(0) = -2$.*

Remarque : on pourrait aussi utiliser (en 3ème méthode) le théorème de la limite de la dérivée, mais ce n'est pas habile ici car nous n'avons pas encore calculé f', c'est d'ailleurs l'objet de la question suivante).

3. Sur $I \setminus \{0\}$, f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est dérivable en tout point de $I \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \frac{\frac{2}{1+2x} \times x - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{(1+2x)x^2},$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+2x)x^2}.$$

4. La fonction φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$\varphi'(x) = 2 - \frac{d}{dx}\left((1+2x)\ln(1+2x)\right) = 2 - 2\ln(1+2x) - (1+2x)\frac{2}{1+2x} = -2\ln(1+2x).$$

On en déduit facilement le signe de $\varphi'(x)$ et les variations de φ :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ceci prouve que $\forall x \in I \setminus \{0\},\ \varphi(x) < 0$, *et que* $\varphi(0) = 0$.

5. *L'expression de* f' *montre que* f' *est du signe de* φ *sur* $I \setminus \{0\}$. *On a donc*
$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) < 0,$$
et (puisque $f'(0) = -2$*) on a même*
$$\forall x \in I,\ f'(x) < 0,$$
ce qui prouve que f *est strictement décroissante sur* I.

6. *La fonction* f *est continue et strictement décroissante, donc c'est une bijection de* $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ *dans l'intervalle image* $J = f(I) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x)[$.

Calculons donc les limites de f *aux bornes de* I *:*

- *Par croissance comparée, on a*
$$\frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{\ln(2x) + \ln(1+\frac{1}{2x})}{x} = \frac{\ln(2) + \ln(1+\frac{1}{2x})}{x} + \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui prouve que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$$
- *On a* $1 + 2x \underset{x\to-\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} 0^+$, *donc par composition de limites,*
$$\ln(1+2x) \underset{x\to-\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty.$$
Par quotient de limites, on obtient que $\frac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to-\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} +\infty$, *et donc que*
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty.$$

Finalement, la fonction f *est donc une bijection (strictement décroissante) de* $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ *dans* $J =]-1, +\infty[$.

7. *Puisque* $0 \in J = f(I)$ *et que* f *est bijective, le réel* 0 *possède donc un unique antécédent* α *dans* I, *i.e*
$$\exists! \alpha \in I, \qquad f(\alpha) = 0.$$

8. *On sait déjà que* f *est dérivable sur* I, *de dérivée :*
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{(1+2x)x^2} & si\ x \neq 0 \\ \\ -2 & si\ x = 0 \end{cases},$$
où $\varphi(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$. *Montrons que cette dérivée* f' *est continue sur* I *:*

- *En tout point* $x \neq 0$, *c'est clair (quotient de fonctions continues).*
- *En* 0 *: il suffit de calculer* $\lim_{x\to 0} f'(x)$, *à l'aide d'un équivalent. On a déjà montré que*
$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$
donc on en déduit :
$$\varphi(x) = 2x - (1+2x)(2x - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) = 2x - 2x + 2x^2 - 4x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = -2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
D'où
$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{(1+2x)x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -2,$$
ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ *et donc* f' *est continue en* 0.

La dérivée f' est continue sur I, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

9. *Le taux d'accroissement de f' en 0 est :*

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{\varphi(x)+2(1+2x)x^2}{(1+2x)x^3}.$$

Or, on a $\varphi(x) = -2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc

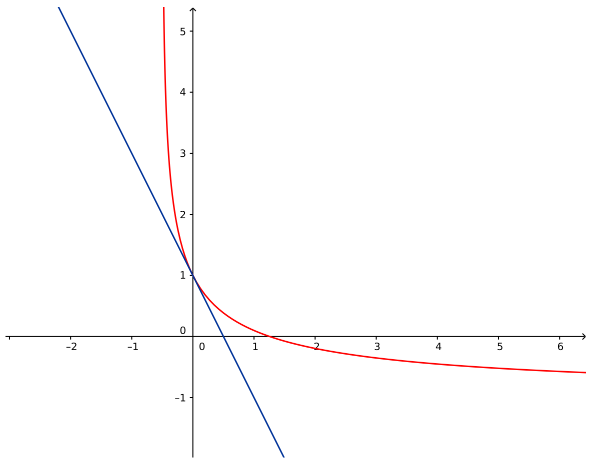
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{16}{3}x^3}{x^3} = \frac{16}{3}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{16}{3}$, ce qui montre que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = \frac{16}{3}$.

10. *Une équation cartésienne de la tangente à la courbe au point $(0; f(0))$ est*

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x + 1.$$

11. *Le graphe de f est :*



* * *