DS3 du 04/11/19 (4h) - Concours blanc

Première partie (2h) : programme de TSI 2

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Quelques séries).
Les trois questions sont indépendantes.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est-elle convergente ? Divergente ?
2. En procédant par téléscopage, montrer que la série $\sum_{k\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ converge et calculer sa somme $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
3. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^2}$, où a est un paramètre réel positif.
   Déterminer les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.

* * *

Exercice 2 (Sous-espaces stables).
Cet exercice se compose de trois parties indépendantes.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable par* φ si et seulement si $\forall \overrightarrow{u} \in F$, $\varphi(\overrightarrow{u}) \in F$, ce qui s'écrit également $\varphi(F) \subset F$.

Partie I

On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de φ.
2. Déterminer une base $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour φ.
3. On pose $\mathcal{D}_1 = Vect(\overrightarrow{c_1})$. Montrer que la droite $\mathcal{D}_1$ est stable par φ.
4. On pose $\mathcal{P}_1 = Vect(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$. Montrer que le plan $\mathcal{P}_1$ est stable par φ.

Partie II

On considère les endomorphismes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Vérifier que les endomorphismes f et g commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$).

6. **Sans calculer de polynôme caractéristique**, montrer que 1 est valeur propre de f, et déterminer tous les vecteurs propres de f associés à cette valeur propre.
7. Vérifier que les vecteurs obtenus à la question précédente sont aussi vecteurs propres de g.
8. **Sans calculer de polynôme caractéristique**, montrer que -1 est valeur propre de f, et déterminer le sous-espace propre $E_{-1}(f)$.
9. Vérifier que le sous-espace vectoriel $E_{-1}(f)$ est stable par g.
10. Déterminer une base $\mathcal{B}_{f,g} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise **à la fois** f et g.
    Déterminer alors $D_f = Mat_{\mathcal{B}_{f,g}}(f)$ et $D_g = Mat_{\mathcal{B}_{f,g}}(g)$.
    On dit alors que f et g sont co-diagonalisables.

Partie III

On considère l'endomorphisme $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le but est ici de déterminer toutes les droites vectorielles et tous les plans vectoriels stables par ϕ.

11. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?
12. Montrer qu'une droite vectorielle $\mathcal{D} = Vect(\overrightarrow{u})$ (avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) est stable par ϕ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de ϕ.
13. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par ϕ.

Dans la suite, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où $O = (0,0,0)$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le produit scalaire canonique entre deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$: si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

On considère un plan vectoriel quelconque de $\mathbb{R}^3$, noté $\mathcal{P}$, d'équation cartésienne

$$\mathcal{P} : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. On notera $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

14. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, montrer que $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
    C'est pourquoi on dit que "$\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$".

Dans la suite, on note $\phi^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A_ϕ^T (la matrice transposée de A_ϕ).

15. Montrer que $\phi^*(\overrightarrow{n}) \neq \overrightarrow{0}$.
16. Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$, on a
    $$\phi(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \phi^*(\overrightarrow{v})$$
17. On suppose que $\mathcal{P}$ est stable par ϕ. Montrer que $\phi^*(\overrightarrow{n})$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
18. En déduire que si $\mathcal{P}$ est stable par ϕ, alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur propre de ϕ^*.
19. Déterminer tous les plans vectoriels stables par ϕ.

* * *

Seconde partie (2h) : programme de TSI 1

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

Exercice 3 (Probabilités).
Dans une urne se trouvent 8 boules. Sur chacune des boules est inscrite l'une des lettres du mot VACANCES.
On pioche **simultanément** 3 boules dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E_1 : "obtenir un V"
   (b) E_2 : "obtenir au moins un A"
   (c) E_3 : "obtenir deux A"
   (d) E_4 : "obtenir deux lettres identiques"
   (e) E_5 : "obtenir trois lettres deux à deux distinctes"
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux lettres identiques sachant qu'au moins une des trois lettres est un A ?
4. Les événements "obtenir deux lettres identiques" et "obtenir au moins un A" sont-ils indépendants ?

* * *

Exercice 4 (Nombres complexes).
Les deux parties sont indépendantes

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 = 15 + 8i.$$

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation suivante :

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0.$$

2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. On note ρ son module et θ son unique argument compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On cherche à établir des expressions explicites de θ en fonction de x et y.
   (a) Exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ uniquement en fonction de x et y.
   (b) On suppose que $Re(z) > 0$. Exprimer simplement θ en fonction de x et y (à l'aide de la fonction arctan).
   (c) La formule établie à la question (b) est-elle vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) \neq 0$?

   On suppose maintenant que $z \in \mathbb{C}$ et $z \notin]-\infty, 0]$.

   (d) Montrer que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}$.
   On pensera à préciser l'intervalle auquel appartient θ.
   (e) En déduire une autre expression de θ en fonction de x et y (toujours à l'aide de la fonction arctan).

* * *

Exercice 5 (Polynômes).
Les deux parties sont indépendantes

1. Soit le polynôme
$$P = X^3 + X^2 + 2X + 1.$$
On note a, b, c les trois racines complexes de P (**on ne demande pas de les calculer**).
   (a) Soit $x_0 \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit racine de P de multiplicité ≥ 2.
   (b) En déduire que les racines a, b, c sont simples (de multiplicité 1).
   (c) Ecrire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire les valeurs de
$$\sigma_1 = a + b + c, \qquad \sigma_2 = ab + ac + bc, \qquad \sigma_3 = abc.$$
   (d) Calculer $S = a^2 + b^2 + c^2$.
   Indication : on pourra développer σ_1^2.
   (e) Effectuer la division euclidienne de X^7 par P.
   (f) En déduire la valeur de $T = a^7 + b^7 + c^7$.
2. (a) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P = X^6 - 1$ et les représenter graphiquement dans le plan complexe.
   (b) Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

* * *

Exercice 6 (Une étude de fonction).
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \in I \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
2. Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
3. Montrer que f est dérivable en tout point $x \in I \setminus \{0\}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de
$$\varphi(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x).$$
4. Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in I$.
Indication : on pourra d'abord étudier les variations de φ.
5. En déduire les variations de f sur I.
6. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
7. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
8. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
9. Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et calculer $f''(0)$.
10. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en 0 au graphe de f.
11. Dessiner le graphe de f.

* * *