Corrigé du DS2 du 21/09/19 (4h) : Séries numériques et algèbre linéaire

Corrigé de l'exercice 1 (Exemples de séries).

1. (a) *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$, on a*

$$\frac{a}{n-2} + \frac{b}{n+2} = \frac{a(n+2) + b(n-2)}{(n-2)(n+2)} = \frac{(a+b)n + (2a-2b)}{n^2-4}.$$

Par identification des numérateurs, l'égalité voulue a donc lieu si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}}.$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right)}.$$

(b) *Pour tout $n \geq 3$, on a donc*

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k}\right).$$

On en déduit la simplification :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \sum_{k=n-1}^{n+2} \frac{1}{k}.$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geq 3, \qquad S_n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}.$$

(c) *Lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \longrightarrow 0$, donc*

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}.$$

Puisque la suite (S_n) converge, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge}}$, *et*

$$\boxed{S = \sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{25}{48}}.$$

2. (a) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a (r étant positif) :*

$$|r^n e^{in\theta}| = r^n |e^{in\theta}| = r^n, \qquad |r^n \cos(n\theta)| = r^n |\cos(n\theta)| \leq r^n.$$

Puisque $0 < r < 1$, la série géométrique $\sum_n r^n$ converge, donc d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries $\sum |r^n e^{in\theta}|$ et $\sum |r^n \cos(n\theta)|$ convergent.

Finalement, $\boxed{\text{les séries } \sum r^n e^{in\theta} \text{ et } \sum r^n \cos(n\theta) \text{ sont absolument convergentes, donc elles sont convergentes}}$.

(b) *On a une série géométrique convergente donc on peut calculer directement sa somme :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \boxed{\frac{(1-r\cos\theta)+ir\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}}.$$

On conclut en prenant la partie réelle de la somme précédente :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(r^n e^{in\theta}) = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta}\right) = \boxed{\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}}.$$

3. (a) *En utilisant le développement limité de* $\sin(x)$ *en* 0*, on obtient*

$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right),$$

donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}}$. *Puisque* $\alpha \geq 3$*, on a* $|u_n| \sim 6n^{\alpha-3}$ *avec* $\alpha - 3 \geq 0$*, donc* $|u_n|$ *ne tend pas vers* 0*, ce qui montre que* u_n *ne tend pas vers* 0*. Donc la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement dans ce cas.*

(b) *En réutilisant l'équivalent précédent, on a* $|u_n| \sim \frac{1}{6n^{3-\alpha}}$*, avec cette fois* $3-\alpha > 3-2 = 1$ *(puisque* $\alpha < 2$*), donc la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ *converge, ce qui permet de déduire par le critère des équivalents pour les séries à termes positifs que* $\sum |u_n|$ *converge.*
Donc la série $\sum u_n$ *converge absolument dans ce cas.*

(c) i. *Pour tout* $n \geq 1$*, on a :*

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} x_k - \sum_{k=1}^{2n} x_k = x_{2n+2} + x_{2n+1} = \frac{1}{6(2n+2)^{3-\alpha}} - \frac{1}{6(2n+1)^{3-\alpha}} \leq 0$$

(car $3-\alpha > 0$*, vu que* $2 \leq \alpha < 3$*). Donc la suite* (S_{2n}) *est décroissante.*
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} x_k - \sum_{k=1}^{2n+1} x_k = x_{2n+3} + x_{2n+2} = -\frac{1}{6(2n+3)^{3-\alpha}} + \frac{1}{6(2n+2)^{3-\alpha}} \geq 0$$

donc la suite (S_{2n+1}) *est croissante.*
Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = x_{2n+1} = -\frac{1}{6(2n+1)^{3-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *car* $3-\alpha > 0$.
Ceci montre que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, ce qui montre que la suite* (S_n) *converge également vers cette limite.*
Finalement, la série $\sum x_n$ *converge, puisque ses sommes partielles ont une limite finie.*

ii. *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$y_n = u_n - x_n = (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}} = (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}\right).$$

En effectuant un développement limité de $\sin(\frac{1}{n})$ *à l'ordre* 5*, on obtient :*

$$y_n = (-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} - \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{120n^{5-\alpha}}.$$

Puisque $|y_n| \sim \frac{1}{120n^{5-\alpha}}$ *et que* $5-\alpha > 2 > 1$*, on en déduit que la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^{5-\alpha}}$ *converge, et donc d'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, la série* $\sum |y_n|$ *converge. Ceci montre que* $\sum y_n$ *converge absolument.*

iii. *La somme de deux séries convergentes donne une série convergente, donc, du fait que* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *convergent, on en déduit que* $\sum u_n = \sum (x_n + y_n)$ *converge dans le cas où* $2 \leq \alpha < 3$.

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Développement asymptotique de la série harmonique).

1. (a) *Fixons un entier $k \geq 2$.*
La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, donc
$$\forall t \in [k; k+1], \quad f(t) \leq f(k).$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit
$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt,$$
c'est-à-dire
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}.$$
De même, f est décroissante sur $[k-1; k]$, donc
$$\forall t \in [k-1; k], \quad f(k) \leq f(t).$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit
$$\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt,$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt.$$
On a donc bien la double inégalité voulue.

(b) *Fixons $n \geq 2$. On somme les inégalités précédemment obtenues pour $k = 2 \cdots n$:*
$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt.$$
Par la relation de Chasles, ceci se réécrit
$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}dt,$$
c'est-à-dire
$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$
En ajoutant 1 à chaque membre de cette inégalité, on obtient
$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1,$$
puisque $H_n = \dfrac{1}{1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

(c) *On factorise à l'intérieur du logarithme :*
$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Ceci peut se réécrire :
$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$
Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$, et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$, et donc que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, ce qui montre que les suites $(\ln(n+1))$ et $(\ln(n))$ sont équivalentes.

(d) *Divisons l'inégalité obtenue en 1.(b) par* $\ln(n)$ *(qui est strictement positif lorsque* $n \geq 2$*) :*

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

La question précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} = 1+0 = 1$.

D'autre part, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\ln(n)} = 1$. *On en conclut par le théorème des gendarmes que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1,$$

c'est-à-dire $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln(n) = (H_{n+1}-H_n)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En faisant un développement limité d'ordre deux ($\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to0}{o}(u^2)$*), on en déduit que*

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2n^2-2n(n+1)+n+1}{2n^2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = \frac{-n+1}{2n^2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque $\frac{-n+1}{2n^2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$, *on en déduit que*

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = \frac{-1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc que $\gamma_{n+1}-\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

(b) *Vu que la suite* $(-\frac{1}{2n^2})$ *est de signe constant strict, on en déduit par le critère des équivalents que les séries* $\sum\limits_{n\geq1} (\gamma_{n+1}-\gamma_n)$ *et* $\sum\limits_{n\geq1} -\frac{1}{2n^2}$ *sont de même nature.*

Puisque la série $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ *converge (par le critère de Riemann), la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{2n^2}$ *aussi (la multiplication par une constante non nulle ne change pas la nature d'une série), et donc la série* $\sum\limits_{n\geq1} (\gamma_{n+1}-\gamma_n)$ *converge.*

(c) *La question précente montre que la suite* $\sum\limits_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1}-\gamma_k)$ *possède une limite quand* $n \to +\infty$.

Mais par téléscopage, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1}-\gamma_k) = \gamma_{n+1}-\gamma_1 = \gamma_{n+1}-1$.

On a donc montré la convergence de la suite $(\gamma_{n+1}-1)$, *ce qui équivaut à la convergence de* (γ_{n+1}), *et donc à la convergence de la suite* (γ_n).

(d) *On a* $\gamma_n = H_n - \ln(n) \to \gamma$, *donc* $(H_n - \ln(n) - \gamma)$ *est une suite qui tend vers* 0, *ce qui montre que* $H_n - \ln(n) - \gamma = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Donc on a bien le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

* * *

Corrigé de l'exercice 3.

A. *1.*

- *Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors, par composition, $P\left(\frac{X}{2}\right)$ et $P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ ont même degré que P (rappelons que $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$). Donc, par somme, $\deg(f(P)) \leq 2$, ce qui montre que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.*
- *Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \tfrac{1}{2}\left[(\lambda P + Q)\left(\tfrac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\lambda P\left(\tfrac{X}{2}\right) + Q\left(\tfrac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\tfrac{X+1}{2}\right) + Q\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \tfrac{\lambda}{2}\left[P\left(\tfrac{X}{2}\right) + P\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right] + \tfrac{1}{2}\left[Q\left(\tfrac{X}{2}\right) + Q\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \lambda f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Finalement, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q),$$

donc φ est une forme linéaire.

3. On a $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2}[1+1] = 1 \\ f(X) = \frac{1}{2}\left[\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right] = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \\ f(X^2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8} \end{cases}$, *donc*

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{(1,X,X^2)}(f(1), f(X), f(X^2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est clairement de rang 3 (elle est échelonnée et possède trois pivots), donc elle est inversible. Vu qu'elle représente f (dans la base $\mathcal{B}$), on en déduit que f est bijective.
L'application f est donc injective et surjective.

5. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$P \in Ker\,\varphi \iff \varphi(P) = 0 \iff P(1) = 0 \iff a + b + c = 0.$$

Les éléments de $Ker\,\varphi$ sont donc les polynômes de la forme

$$P = a + bX - (a+b)X^2 = a(1 - X^2) + b(X - X^2),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.
La famille $(1 - X^2, X - X^2)$ est donc une famille génératrice de $Ker\,\varphi$. En outre, cette famille est libre puisque

$$a(1 - X^2) + b(X - X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff a + bX - (a+b)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff a = b = 0.$$

On en déduit que $(1 - X^2, X - X^2)$ est une base de $Ker\,\varphi$, qui est donc un espace vectoriel de dimension 2.

6.

- *Puisque $Ker\,\varphi \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$, l'application φ n'est pas injective.*
- *Par le théorème du rang, $\dim(Im\,\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(Ker\,\varphi) = 3 - 2 = 1$.*
  Or, $Im\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Vu que $\mathbb{R}$ est de dimension 1, on en déduit (par égalité des dimensions), que $Im\,\varphi = \mathbb{R}$. L'image de φ est donc égale à son espace d'arrivée, c'est-à-dire que φ est surjective.

B. *7.*

- *Déjà, $\mathcal{B}'$ est bien une famille de $\mathbb{R}_2[X]$, puisque tous ses vecteurs sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.*

- *Ensuite, la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puisque*

$$\begin{aligned} aQ_0+bQ_1+cQ_2=0_{\mathbb{R}_2[X]} &\iff (a+b+c)+(-2b-6c)X+6cX^2=0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ -2c-6c=0 \\ 6c=0 \end{array}\right. \\ &\iff a=b=c=0 \end{aligned}$$

- *Enfin, $\mathcal{B}'$ est de cardinal 3, et $\dim(\mathbb{R}_2[X])=3$, donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

8. *Par définition, les colonnes de M sont les coordonnées des $f(Q_i)$ dans la base $\mathcal{B}'=(Q_0,Q_1,Q_2)$.*
$f(Q_0)=f(1)=1=Q_0$,
$f(Q_1)=f(1-2X)=f(1)-2f(X)=1-\left(X+\frac{1}{2}\right)=-X+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}Q_1$,
$f(Q_2)=f(1-6X+6X^2)=f(1)-6f(X)+6f(X^2)=1-(3X+\frac{3}{2})+\frac{3}{2}X^2+(\frac{3}{2}X+\frac{3}{4})$, donc $f(Q_2)=\frac{3}{2}X^2-\frac{3}{2}X+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}Q_2$.
On en déduit que :

$$M=Mat_{\mathcal{B}'}(f)=Mat_{(Q_0,Q_1,Q_2)}(Q_0,Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

9. *Soit $P=a+bX+cX^2$.*

   i. *On cherche les réels (α,β,γ) tels que*

$$P=\alpha Q_0+\beta Q_1+\gamma Q_2 \iff a+bX+cX^2=\alpha+\beta(1-2X)+\gamma(1-6X+6X^2),$$

   c'est-à-dire

$$a+bX+cX^2=(\alpha+\beta+\gamma)+(-2\beta-6\gamma)X+(6\gamma)X^2.$$

   On en déduit le système :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma=a \\ -2\beta-6\gamma=b \\ 6\gamma=c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \gamma=\frac{1}{6}c \\ \beta=-\frac{1}{2}(b+c) \\ \alpha=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c \end{array}\right. .$$

   Finalement, on a donc $[P]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{2}(b+c) \\ \frac{1}{6}c \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6a+3b+2c \\ -3b-3c \\ c \end{pmatrix}$.

   ii. *Puisque $Mat_{\mathcal{B}'}(f)=M$, on en déduit que $Mat_{\mathcal{B}'}(f^n)=M^n$, et donc d'après la formule matricielle de l'image d'un vecteur :*

$$[f^n(P)]_{\mathcal{B}'}=M^n\times[P]_{\mathcal{B}'}.$$

   Mais la matrice M est diagonale, donc $M^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$, *ce qui entraîne :*

$$[f^n(P)]_{\mathcal{B}'}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6a+3b+2c \\ -3b-3c \\ c \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6a+3b+2c \\ \frac{-3b-3c}{2^n} \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix}.$$

   iii. *La question précédente montre que :*

$$f^n(P)=\frac{1}{6}\left((6a+3b+2c)Q_0+\left(\frac{-3b-3c}{2^n}\right)Q_1+\left(\frac{c}{4^n}\right)Q_2\right).$$

   En redécomposant les polynômes Q_i dans la base canonique $(1,X,X^2)$, on obtient alors l'expression désirée :

$$f^n(P)=\left(a+\frac{b}{2}-\frac{b}{2^{n+1}}+\frac{c}{3}-\frac{c}{2^{n+1}}+\frac{c}{3\times 2^{2n+1}}\right)+\left(\frac{b}{2^n}+\frac{c}{2^n}-\frac{c}{2^{2n}}\right)X+\left(\frac{c}{2^{2n}}\right)X^2.$$

10. Fixons $P \in \mathbb{R}_2[X]$

- *La propriété annoncée est vraie pour $n=1$ car*

$$\frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{2^1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = f(P).$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que*

$$f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

En composant par f encore une fois, on obtient par linéarité de f :

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right).$$

Or, pour tout k, on a (par définition de f) :

$$f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right)+P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right]$$

(car en posant $Q(X)=P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$, on a $f(Q)=\frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right)+Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$).
D'où :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right)+P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=0}^{2^n-1}P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ensuite, il suffit d'observer que

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) = \sum_{0\leq q\leq 2^{n+1}-2 \text{ et } q \text{ pair}} P\left(\frac{X+q}{2^{n+1}}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{1\leq q\leq 2^{n+1}-1 \text{ et } q \text{ impair}} P\left(\frac{X+q}{2^{n+1}}\right),$$

pour s'apercevoir que la somme de ces deux sommes vaut $\displaystyle\sum_{0\leq q\leq 2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+q}{2^{n+1}}\right)$, et donc

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{q=0}^{2^{n+1}-1}P\left(\frac{X+q}{2^{n+1}}\right),$$

ce qui montre que la propriété annoncée est vraie au rang suivant.

Finalement, la propriété annoncée est vraie pour $n=1$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* * *

Corrigé de l'exercice 4. *1. En tant que composée de deux endomorphismes, l'application $p\circ q$ est un endomorphisme.*
De plus, par associativité, $(p\circ q)^2 = p\circ(q\circ p)\circ q$.
Puisque $p\circ q = q\circ p$ ainsi que $p^2=p$, $q^2=q$, on a donc

$$(p\circ q)^2 = p\circ(p\circ q)\circ q = p^2\circ q^2 = p\circ q,$$

ce qui montre bien que $p\circ q$ est un projecteur.

2. $\boxed{\supset}$ *Si* $x_1 \in Ker(p)$ *et* $x_2 \in Ker(q)$, *alors* $x_1 + x_2 \in Ker(p \circ q)$ *: en effet*

$$(p \circ q)(x_1 + x_2) = p(q(x_1)) + p(q(x_2)) = q(p(x_1)) + p(q(x_2)) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E.$$

$\boxed{\subset}$ *Si* $x \in Ker(p \circ q)$, *alors* x *peut s'écrire comme somme d'un élément de* $Ker(p)$ *et d'un élément de* $Ker(q)$. *En effet : si* $(p \circ q)(x) = 0_E$, *alors on a* $q(x) \in Ker(p)$, *donc en posant :*

$$x_1 = q(x), \qquad x_2 = x - q(x),$$

on a bien $x = x_1 + x_2$, *ainsi que* $x_1 \in Ker(p)$ *et* $q(x_2) = q(x) - q(q(x)) = 0_E$ *(car* $q^2 = q$*), c'est-à-dire* $x_2 \in Ker(q)$.

3. $\boxed{\subset}$ *Si* $y = (p \circ q)(x)$ *avec* $x \in E$, *alors* $y = p(q(x)) \in Im(p)$ *mais aussi* $y = q(p(x)) \in Im(q)$, *donc* $y \in Im(p) \cap Im(q)$.

$\boxed{\supset}$ *Si* $y \in Im(p) \cap Im(q)$, *alors il existe* x_1 *et* x_2 *dans* E *tels que*

$$y = p(x_1) = q(x_2).$$

En composant par p, *il vient* $p(y) = p^2(x_1) = p(x_1) = y$. *Mais on a aussi* $p(y) = p(q(x_2))$, *donc* $y = p(q(x_2)) \in Im(p \circ q)$.

* * *