DS2 du 21/09/19 (4h) : Séries numériques et algèbre linéaire

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Exemples de séries).

1. Pour tout $n \geq 3$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2-4}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k$.
   (a) Déterminer deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $\forall n \geq 3,\ u_n = \dfrac{a}{n-2} + \dfrac{b}{n+2}$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de S_n (sans symbole $\sum$).
   Indication : on procèdera par téléscopage.
   (c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} u_k$.
2. Soit r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, et soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier la convergence des séries $\sum r^n e^{in\theta}$ et $\sum r^n \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel fixé.
   (a) On suppose que $\alpha \geq 3$. Montrer que $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   On pourra déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
   (b) On suppose que $\alpha < 2$. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument.
   (c) On suppose que $2 \leq \alpha < 3$. On pose $x_n = \dfrac{(-1)^n}{6n^{3-\alpha}}$ et $y_n = u_n - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire que $\sum x_n$ converge.
      ii. Déterminer un équivalent simple de y_n lorsque $n \to +\infty$, et en déduire que la série $\sum y_n$ converge absolument.
      iii. En déduire enfin la nature de $\sum u_n$.

* * *

Exercice 2 (Développement asymptotique de la série harmonique).
Dans ce problème, on s'intéresse à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. *Divergence de la série harmonique et équivalent des sommes partielles*
   On sait (d'après le critère de Riemann) que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
   On a donc $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (puisque (H_n) est croissante et divergente) .
   On se propose ici de déterminer un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.
   (a) Pour tout entier $k \geq 2$, montrer que
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt.$$
   (b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 2$, puis montrer que
   $$\forall n \geq 2, \qquad \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$
   (c) Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   Indication : on pourra factoriser dans le ln ...
   (d) Déterminer un équivalent simple de H_n lorsque $n \to +\infty$.
2. *La constante d'Euler*
   On pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   Indication : on pourra effectuer un développement limité.
   (b) Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$?
   (c) En déduire que la **suite** $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ converge.
   On notera $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$, et on l'appellera *la constante d'Euler*.
   (d) Montrer enfin que $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

* * *

Exercice 3 (Endomorphisme et polynômes).
La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \text{ définie par } f(P) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] ;$$

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi(P) = P(1).$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ (l'application "identité" $P \mapsto P$), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

A. Etude de f et φ

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, en indiquant les calculs intermédiaires. On notera A cette matrice.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $Ker\,\varphi$. Quelle est la dimension de $Ker\,\varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul de f^n

On note $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$(Q_0, Q_1, Q_2) = (1\ ,\ -2X + 1\ ,\ 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires. On notera M cette matrice (vérifier qu'elle est bien diagonale).
9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   i. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$.
   ii. Déterminer les coordonnées de $f^n(P)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   iii. En déduire l'expression de $f^n(P)$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
10. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

* * *

Exercice 4.
Soient p, q deux projecteurs d'un K-ev E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $Ker(p \circ q) = Ker(p) + Ker(q)$.
3. Montrer que $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$.

* * *