Corrigé du DS1 du 02/09/19 (2h) : Suites numériques

Corrigé de l'exercice 1 (Sur les relations de comparaison).

1. *Quelques définitions*
   - "$u_n = o(v_n)$" *signifie que* $\boxed{\text{le quotient } \frac{u_n}{v_n} \text{ (qui existe à partir d'un certain rang) tend vers } 0}$ *lorsque* $n \to +\infty$.
   - "$u_n \sim v_n$" *signifie que* $\boxed{\text{le quotient } \frac{u_n}{v_n} \text{ (qui existe à partir d'un certain rang) tend vers } 1}$ *lorsque* $n \to +\infty$.
   - "$u_n = O(v_n)$" *signifie que* $\boxed{\text{le quotient } \frac{u_n}{v_n} \text{ (qui existe à partir d'un certain rang) est borné}}$, *c'est-à-dire qu'il existe un réel* $M > 0$ *et un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq M|v_n|$.
2. *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors le quotient* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers* 0. *Or, une suite convergente est bornée, donc la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est bornée, ce qui montre que* $u_n = O(v_n)$.
3. (a) *On a, à partir d'un certain rang,* $u_n \neq 0$ *et* $v_n \neq 0$, *donc*
$$\frac{w_n}{v_n} = \frac{w_n}{u_n} \times \frac{u_n}{v_n}.$$
   Or, par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{u_n} = 0$, *ainsi que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, *donc finalement,* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{v_n} = 0$, *ce qui montre que* $w_n = o(v_n)$.

   (b) *On a, à partir d'un certain rang,* $u_n \neq 0$ *donc*
$$\frac{u_n + w_n}{u_n} = 1 + \frac{w_n}{u_n}.$$
   Or, par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{u_n} = 0$, *donc on en déduit* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+w_n}{u_n} = 1$, *ce qui montre que* $u_n + w_n \sim u_n$.
4. (a) *En posant* $\boxed{u_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 1}$, *on a* $u_n \sim v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
   En effet, on a $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, *et* $u_n - v_n = \frac{1}{n} \to 0$.

   (b) *En posant* $\boxed{u_n = n + 1 \text{ et } v_n = n}$, *on a* $u_n \sim v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 1$.
   En effet, on a $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, *et* $u_n - v_n = 1 \to 1$.

   (c) *En posant* $\boxed{u_n = n^2 + n \text{ et } v_n = n^2}$, *on a* $u_n \sim v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = +\infty$.
   En effet, on a $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, *et* $u_n - v_n = n \to +\infty$.

   (d) *En posant* $\boxed{u_n = n + (-1)^n \text{ et } v_n = n}$, *on a* $u_n \sim v_n$ *et* $u_n - v_n$ *n'a pas de limite lorsque* $n \to +\infty$.
   En effet, on a $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \to 1$ *(puisque* $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$*), et* $u_n - v_n = (-1)^n$, *qui n'a pas de limite lorsque* $n \to +\infty$.

   (e) *En posant* $\boxed{u_n = 2n \text{ et } v_n = n}$, *on a* $u_n = O(v_n)$ *mais pas* $u_n = o(v_n)$.
   En effet, Le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ *est constant égal à* 2, *donc borné, mais il ne tend pas vers* 0.
5. (a) *En divisant numérateur et dénominateur par* 3^n, *on obtient :*
$$u_n = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n} + 3}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = \frac{3 + 2 * (2/3)^n}{1 + (2/3)^n}.$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n = 0$ *(car* $2/3 \in]-1;1[$*), donc par somme et quotient de limites, on en déduit que* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3}$.

(b) *En divisant numérateur et dénominateur par n^2 (qui est le terme dominant), on obtient, pour n suffisamment grand (puisque $2n^2-3n+1=(n-1)(2n-1)$, il faut supposer $n\geq 2$ pour que le dénominateur soit non nul) :*

$$v_n = \frac{1+\frac{2\sin(n)}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\left|\frac{2\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\sin(n)}{n} = 0$. *Puisqu'on a aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{n} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, *on en déduit par somme et quotient de limites que* $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$.

(c) *Les trois suites (2^n), (3^n) et (n^2) tendent vers $+\infty$ mais on a également $n^2=o(2^n)$ (d'après les théorèmes de croissances comparées), ainsi que $2^n=o(3^n)$ (puisque $\frac{2^n}{3^n}=(2/3)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). On en déduit les équivalences :*

$$2^n+n^2+3 = 2^n+o(2^n)\sim 2^n,$$

$$2^n+3^n+1 = 3^n+o(3^n)\sim 3^n.$$

Donc par quotient d'équivalents, $w_n \sim \frac{2^n}{3^n} = (2/3)^n$, *ce qui montre que* $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

6. *Utilisons le développement limité suivant :*

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3),$$

avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{1}{n}$ (qui tend bien vers 0 lorsque $n\to+\infty$). On obtient

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{16n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

De même, le DL : $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ *utilisé avec* $x=\frac{1}{2n}$ *donne :*

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}-\frac{1}{48n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Et le DL : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ *utilisé avec* $x=\frac{1}{8n^2}$ *donne :*

$$\ln\left(1+\frac{1}{8n^2}\right) = \frac{1}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En combinant ces développements limités, il vient

$$u_n = 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{16n^3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{48n^3}\right)+\frac{1}{8n^2}-1+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Finalement, on a $u_n=\frac{1}{12n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, *ce qui montre que* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^3}}$.

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Etude d'une suite récurrente).

1. *L'expression $\frac{7x-12}{3x-5}$ est définie pour tous les réels x tels que $3x-5\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq\frac{5}{3}$. Donc f est définie sur l'ensemble* $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\}}$.
De plus, f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

2. *Pour $x \notin \{0; \frac{5}{3}\}$, on a :*

$$f(x) = \frac{7 - \frac{12}{x}}{3 - \frac{5}{x}},$$

donc, puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to\pm+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par somme et quotient de limites que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{7}{3}}.$$

Interprétation graphique : la courbe de f admet $\boxed{\textit{la droite } y = \frac{7}{3} \textit{ comme asymptote horizontale}}$ *lorsque $x \to \pm+\infty$.*
En outre, on a $7x - 12 \underset{x\to\frac{5}{3}}{\longrightarrow} \frac{35}{3} - 12 = -\frac{1}{3} < 0$, ainsi que $3x - 5 \underset{x\to\frac{5}{3}^+}{\longrightarrow} 0^+$ et $3x - 5 \underset{x\to\frac{5}{3}^-}{\longrightarrow} 0^-$, donc on en déduit par quotient de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{5}{3}^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{5}{3}^+} f(x) = -\infty}.$$

Interprétation graphique : la courbe de f admet $\boxed{\textit{la droite } x = \frac{5}{3} \textit{ comme asymptote verticale}}$ *lorsque $x \to \frac{5}{3}$.*

3. *La fonction f est dérivable et on a :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{7(3x-5) - (7x-12)3}{(3x-5)^2} = \frac{1}{(3x-5)^2}.$$

Puisque $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on en déduit que f est strictement croissante **sur chaque intervalle de** $\mathcal{D}_f$.

Remarque.
Attention, ne pas dire que "f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$" !
C'est faux car par exemple : $f(0) = \frac{12}{5} = 2,4 > f(2) = 2$, alors que $0 < 2$.
Explication : le théorème qui relie le signe de f' à la monotonie de f ne marche que sur un **intervalle**, *c'est-à-dire un ensemble "en un seul morceau".*

En conclusion, $\boxed{f \textit{ est strictement croissante sur }]-\infty; \frac{5}{3}[\textit{ et sur }]\frac{5}{3}; +\infty[}$.
Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	‖	$+$
Variations de f	$\frac{7}{3} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{7}{3}$

4. *Pour tout $a \in \mathcal{D}_f$, le graphe de f possède une tangente au point d'abscisse $x = a$, notée $\mathcal{T}_a$, d'équation cartésienne :*

$$\mathcal{T}_a : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

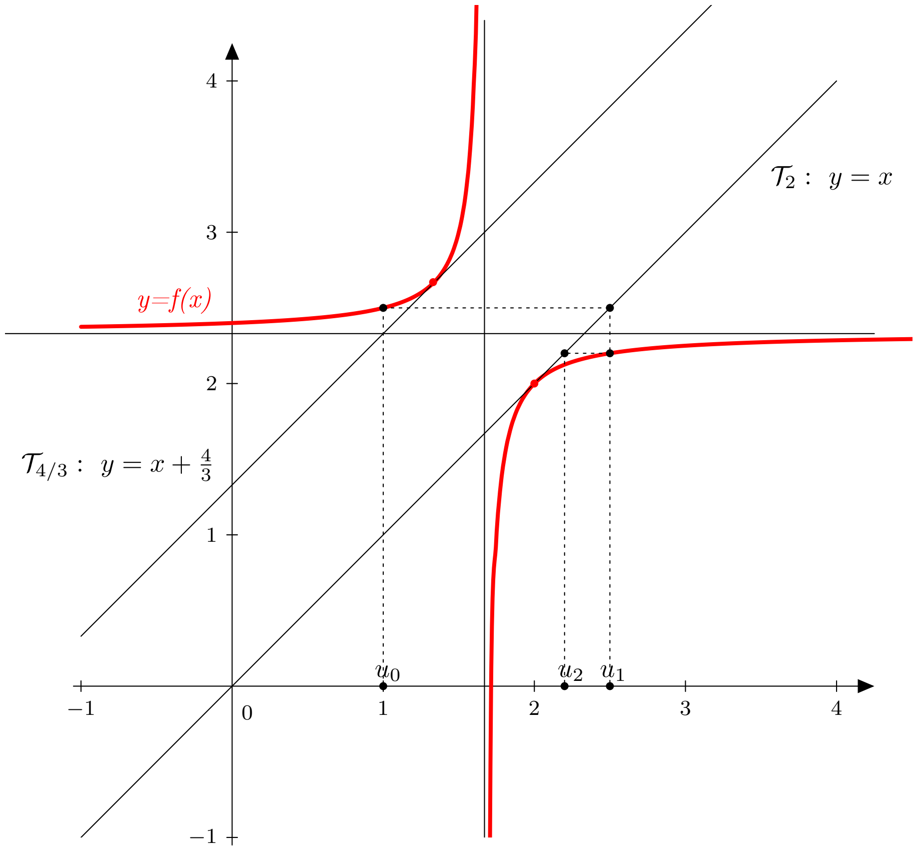
Au point d'abscisse $x = \frac{4}{3}$, on a $f(\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}$ et $f'(\frac{4}{3}) = 1$, donc on obtient :

$$\boxed{\mathcal{T}_{4/3} : \quad y = x + \frac{4}{3}}.$$

Au point d'abscisse $x = 2$, on a $f(2) = 2$ et $f'(2) = 1$, donc on obtient :

$$\boxed{\mathcal{T}_2 : \quad y = x}.$$

5. *Représentation graphique : les tangentes et asymptotes sont en trait plein, les traits de construction de u_1 et u_2 sont en pointillés :*



6. *Montrons par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \geq 2$.
   - *C'est vrai pour* $n = 1$ *car* $u_1 = f(1) = \frac{5}{2} \geq 2$.
   - *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $u_n \geq 2$, *alors par croissance de* f *sur l'intervalle* $[2; +\infty[$ *(qui est bien inclus dans* $[\frac{5}{3}; +\infty[$*), on en déduit que* $f(u_n) \geq f(2)$, *c'est-à-dire* $u_{n+1} \geq 2$. *La propriété est donc héréditaire.*

   La propriété $u_n \geq 2$ *est vraie pour* $n = 1$ *et héréditaire à partir du rang 1, donc elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

7. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Nous avons :*

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{7u_n - 12}{3u_n - 5} - u_n = \frac{-3u_n^2 + 12u_n - 12}{3u_n - 5} = \frac{-3(u_n - 2)^2}{3u_n - 5}.$$

   D'après la question précédente, on a $u_n \geq 2$ *(puisque* $n \geq 1$*), donc* $3u_n - 5 \geq 1 > 0$. *Vu que* $-3(u_n - 2)^2 \leq 0$, *on en déduit par quotient que* $u_{n+1} - u_n \leq 0$, *et donc* $u_{n+1} \leq u_n$.
   Ceci montre que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 1}$.
   Ce n'est pas vrai à partir du rang 0 car $u_0 = 1 < u_1 = 2,5$.

8. *La suite* $(u_n)_{n \geq 1}$ *est décroissante et minorée par 2, donc* $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell}$.

   Remarque.
   Ici, on se permet de raisonner à partir du rang 1, car le premier terme u_0 *n'influe pas sur la convergence. Ce serait la même chose en ignorant un nombre quelconque fini de termes.*

9. *On a* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Passons à la limite dans cette égalité :*
   - *on sait que* $u_n \to \ell$, *donc on a aussi* $u_{n+1} \to \ell$ *;*
   - *en outre,* $\ell \geq 2$ *(puisque* $u_n \geq 2$ *pour tout* $n \geq 1$*), donc, par continuité de* f *au point* ℓ, *on a aussi* $f(u_n) \to f(\ell)$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$, *donc* $\boxed{\ell = f(\ell)}$.
Enfin, $f(\ell) = \ell \iff \frac{7\ell-12}{3\ell-5} = \ell \iff (\ell-2)^2 = 0$, *donc* $\boxed{\ell = 2}$.

* * *

Corrigé de l'exercice 3 (Moyenne arithmético-géométrique).

1. *Montrons par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq v_n$.
   - *C'est vrai pour* $n = 0$ *car* $(u_0, v_0) = (a, b)$, *et on a* $0 < a \leq b$ *par hypothèse.*
   - *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $0 < u_n \leq v_n$, *alors* $u_n v_n > 0$ *par produit, et donc la quantité* $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ *est bien définie et strictement positive. De plus :*

   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n}^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0,$$

   et donc $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

   La propriété $0 < u_n \leq v_n$ *est vraie pour* $n = 0$ *et héréditaire à partir du rang* 0, *donc elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. - *Etudions la monotonie de* (u_n) *: puisque* $0 < u_n \leq v_n$, *on a* $u_n v_n \geq u_n^2$, *donc*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n \geq \sqrt{u_n^2} - u_n = 0,$$

   (on a $\sqrt{u_n^2} = u_n$ *car* $u_n \geq 0$*). D'où* $u_{n+1} \geq u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *ce qui montre que* (u_n) *est croissante.*
   - *Faisons de même avec* (v_n) *:*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leq 0,$$

   d'où $v_{n+1} \leq v_n$, *ce qui montre que* (v_n) *est décroissante.*
   - *Reste à montrer la convergence des deux suites. En utilisant leur monotonie, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < a = u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 = b$, *donc les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont à valeurs dans* $[a; b]$.
   La suite (u_n) *est croissante et majorée par* b, *donc elle converge.*
   La suite (v_n) *est décroissante et minorée par* a, *donc elle converge.*

3. *En passant à la limite dans l'égalité* $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, *qui est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on obtient :*

   $$L' = \frac{1}{2}(L + L'),$$

   et donc $L' = L$.
   Enfin, la croissance de (u_n) *amène* $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \geq u_0 = a$, *et la décroissance de* (v_n) *amène* $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n \leq v_0 = b$. *Donc* $L \in [a; b]$.

4. *En reprenant le calcul fait en 1. :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}\right)^2.$$

   Or, $v_n \geq u_n \geq a > 0$, *donc* $\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n} \geq 2\sqrt{a} > 0$, *et on en déduit :*

   $$\left(\frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}\right)^2 \leq \left(\frac{u_n - v_n}{2\sqrt{a}}\right)^2,$$

   donc finalement :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{(v_n - u_n)^2}{8a}.$$

5. *On sait déjà que* $0 \leq v_n - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Montrons l'inégalité $v_n - u_n \leq 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}$ *par récurrence sur* n *:*

- *Elle est vraie pour* $n = 0$ *car* $v_0 - u_0 = b - a$ *et* $8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^0} = b - a$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $v_n - u_n \leq 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}$, *alors en utilisant la question précédente :*

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8a} \leq \left(8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}\right)^2 \times \frac{1}{8a} = 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^{n+1}}.$$

La propriété $v_n - u_n \leq 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}$ *est vraie pour* $n = 0$ *et héréditaire à partir du rang* 0, *donc elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

* * *