DS1 du 02/09/19 (2h) : Suites numériques

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Sur les relations de comparaison).
Dans cet exercice, on ne considère que des suites réelles, notées $(u_n), (v_n), (w_n), \cdots$ dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. *Quelques définitions*
   Que signifie :
   - "(u_n) est négligeable devant (v_n)" ? (notation : $u_n = o(v_n)$)
   - "(u_n) est équivalente à (v_n)" ? (notation : $u_n \sim v_n$)
   - "(u_n) est dominée par (v_n)" ? (notation : $u_n = O(v_n)$)
2. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$.
3. Soit trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_n \sim v_n$ et $w_n = o(u_n)$.
   (a) Montrer que $w_n = o(v_n)$.
   (b) Montrer que $u_n + w_n \sim u_n$.
4. Dans chacun des cas suivants, trouver des suites (u_n) et (v_n) telles que
   (a) $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$;
   (b) $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 1$;
   (c) $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = +\infty$;
   (d) $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.
   (e) $u_n = O(v_n)$ mais pas $u_n = o(v_n)$.
   On justifiera soigneusement chaque exemple donné.
5. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$;
   (b) $v_n = \dfrac{n^2 + 2n\sin(n) + 1}{2n^2 - 3n + 1}$;
   (c) $w_n = \dfrac{2^n + n^2 + 3}{2^n + 3^n + 1}$.
6. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{8n^2}\right) - 1.$$
   En utilisant des développements limités, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^\alpha}$, où C et α sont deux réels non nuls à déterminer.

* * *

Exercice 2 (Etude d'une suite récurrente).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 12}{3u_n - 5}.$$

En considérant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-12}{3x-5}$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, et justifier que f est dérivable sur cet ensemble.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$, et interpréter graphiquement ces résultats.
3. Etudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
   On résumera les résultats dans un tableau de variations comportant les limites de f.
4. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 4/3$. Faire de même au point d'abscisse $x = 2$.
5. Dans un repère orthonormé (se limiter à la zone $-1 \leq x \leq 4$ et $-1 \leq y \leq 4$), représenter le graphe de f (en s'aidant des asymptotes et tangentes précédemment déterminées), la droite d'équation $y = x$, et en déduire une construction géométrique de u_1 et u_2 **en abscisse** à partir de $u_0 = 1$.
   On dessinera les traits de construction en pointillés.
6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [2; +\infty[$.
7. Montrer que la suite (u_n) est monotone à partir du rang 1. Est-ce vrai à partir du rang 0 ?
8. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On notera $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
9. Montrer que le réel ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ et en déduire la valeur de ℓ.

* * *

Exercice 3 (Moyenne arithmético-géométrique).
On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$0 < u_0 = a \leq b = v_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq v_n$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones et convergentes.
   Dans la suite, on note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $L' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Montrer que $L = L' \in [a; b]$.
   Cette limite commune est appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{(v_n - u_n)^2}{8a}$.
5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq v_n - u_n \leq 8a\left(\frac{b-a}{8a}\right)^{2^n}.$$

* * *