# Corrigé du DS02 - Concours blanc

**Première partie : programme de TSI 2 (2h)**

* * *

**Corrigé de l'exercice 1 (Séries de Bertrand).**

**A.** *1. Pour tout $n \geqslant 2$, $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta n}$. Vu que $\alpha - \gamma > 0$, on en déduit que* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0}$ *(c'est clair si $\beta \geqslant 0$, cela résulte des croissances comparées si $\beta < 0$).*

*2. Puisque $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$, on a (par définition de la limite) :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \implies |n^\gamma u_n| \leq \varepsilon.$$

*En choisissant $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un entier $n_0$ (qu'on peut choisir supérieur ou égal à 2) tel que*

$$\boxed{n \geq n_0 \implies |n^\gamma u_n| \leq 1 \implies u_n \leq \frac{1}{n^\gamma}}.$$

*3. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge (puisque $\gamma > 1$), donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs (qui s'applique car $u_n \geq 0$),* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 2} u_n \text{ converge}}$.

*4. On est dans le cas où $(\alpha;\beta) = (2;-1)$, donc* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}}$ *converge d'après la question précédente (puisque $\alpha > 1$).*

*5. On a $\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$, puisque $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Vu que $\frac{\ln n}{n^2} > 0$ pour tout $n \geq 2$, on en déduit par le critère des équivalents que la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$, donc* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{ converge}}$.

**B.** *6. Pour tout $n \geqslant 2$, $nu_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}\ln^\beta n} = \frac{n^{|1-\alpha|}}{\ln^\beta n}$, donc* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty}$ *(facile si $\beta \leq 0$, par croissance comparée si $\beta > 0$).*

*7. Vu que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a (par définition de la limite infinie) :*

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \implies nu_n \geq A.$$

*En choisissant $A = 1$, on obtient l'existence d'un entier $n_0$ tel que*

$$\boxed{n \geq n_0 \implies nu_n \geq 1 \implies u_n \geq \frac{1}{n}}.$$

*8. Vu que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit par le critère de comparaison des séries à termes positifs que* $\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ diverge}}$.

*9. On est dans le cas où $(\alpha;\beta) = (\frac{1}{2};-1)$, donc* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}$ *diverge d'après la question précédente (puisque $\alpha < 1$).*

*10. On a $\frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{\sqrt{n}}$, puisque*

$$\ln(n^2+1) = \ln\left(n^2(1+\frac{1}{n^2})\right) = 2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 2\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

*Vu que $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ pour tout $n \geq 2$, on en déduit par le critère des équivalents que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$ est de même nature que $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. En conclusion,* $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}} \text{ est divergente}}$.

**C.**11. *Pour $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ est dérivable sur $[2;+\infty[$, et*

$$\forall x \geq 2, \qquad f'_\beta(x) = -\frac{(\ln(x))^\beta + x\beta(\ln(x))^{\beta-1} \times \frac{1}{x}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} = -\frac{\beta + \ln(x)}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}}.$$

*Puisque $x^2(\ln(x))^{\beta+1} > 0$ pour tout $x \geq 2$, on en déduit que la dérivée $f'_\beta$ a le même signe que $-(\ln(x)+\beta)$, on a donc $f'_\beta(x) \leq 0$ pour $x \geq e^{-\beta}$ (et $x \geq 2$). En posant $n_0 = \max(2; e^{-\beta})$, on a donc $\boxed{f_\beta \text{ décroissante sur } [n_0;+\infty[}$.*

12. *Soit $k \geq n_0+1$. La fonction $f_\beta$ étant décroissante sur l'intervalle $[k-1;k] \subset [n_0;+\infty[$ (d'après la question précédente), on a*

$$\forall t \in [k-1,k], \quad f_\beta(k) \leq f_\beta(t) \leq f_\beta(k-1),$$

*donc par croissance de l'intégrale :*

$$\int_{k-1}^k f_\beta(k)dt \leq \int_{k-1}^k f_\beta(t)dt \leq \int_{k-1}^k f_\beta(k-1)dt,$$

*c'est-à-dire*

$$f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^k f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k-1).$$

*En raisonnant de même sur l'intervalle $[k;k+1]$ (où la fonction $f_\beta$ est aussi décroissante), on obtient l'encadrement :*

$$\int_k^{k+1} f_\beta(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \int_k^{k+1} f_\beta(k)dt,$$

*c'est-à-dire*

$$f_\beta(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k).$$

*En combinant les deux encadrements obtenus, on aboutit à :*

$$\boxed{\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^k f_\beta(t)dt}.$$

13. *Soit $n \geq n_0+1$. En sommant les inégalités précédemment obtenues pour $k$ allant de $n_0+1$ à $n$, on obtient par croissance de la somme :*

$$\sum_{k=n_0+1}^n \int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f_\beta(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f_\beta(t)dt.$$

*En utilisant la relation de Chasles avec ces intégrales, ceci se réécrit :*

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^n f_\beta(t)dt.$$

14. *En posant $u(t) = \ln(t)$, on a $f_\beta(t) = \frac{1}{t}(\ln(t))^{-\beta} = u'(t)u^{-\beta}(t)$, donc :*

- $\boxed{\text{si } \beta \neq 1}$*, alors une primitive de $f_\beta$ sur $[2;+\infty[$ est :*

$$\boxed{F_\beta(t) = \frac{u^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1} = \frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}}.$$

- $\boxed{\text{si } \beta = 1}$*, alors $f_\beta(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$, donc une primitive de $f_\beta$ sur $[2;+\infty[$ est :*

$$\boxed{F_\beta(t) = \ln(u(t)) = \ln(\ln(t))}.$$

15. *Supposons que $\beta \leq 1$. D'après l'encadrement établi à la question 13., on obtient la minoration :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \geq F_\beta(n+1) - F_\beta(n_0+1).$$

- $\boxed{\text{si } \beta < 1}$, *alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \geq \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1} - (\ln(n_0+1))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

*Puisque $-\beta+1>0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1}-(\ln(n_0+1))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = +\infty$, donc par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} = +\infty$, ce qui montre que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \text{ diverge}}$.*

- $\boxed{\text{si } \beta = 1}$, *alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n_0+1)),$$

*donc la conclusion est identique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$, donc $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}}$.*

16. *Supposons que $\boxed{\beta > 1}$. D'après l'encadrement établi à la question 13., on obtient la majoration :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq F_\beta(n) - F_\beta(n_0),$$

*ce qui se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \leq \frac{(\ln(n))^{-\beta+1} - (\ln(n_0))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

*Puisque $-\beta+1<0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^{-\beta+1}-(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{\beta-1}$.*
*Ainsi, la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}$ est majorée par une suite convergente, donc elle est elle même majorée. Vu que $(S_n)$ est croissante (le terme général de la série étant positif), on en déduit que la suite $(S_n)$ est convergente, donc $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \text{ converge}}$.*

* * *

**Corrigé de l'exercice 2 (Etude d'une famille de matrices).**

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(2a+2) \end{pmatrix}$$

1. (a) $\det(M_a) = -2a^2$ *et $M_a$ inversible ssi* $\det(M_a) \neq 0$ *i.e. $a \neq 0$. Donc* $\underline{M_a \text{ est inversible ssi } a \neq 0}$.

   (b) *Si $a=0$, on a :*

$$M_a = M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*La première colonne est nulle et les deux dernières forment une famille libre donc* $\underline{\mathrm{rg}(M_0) = 2}$.

2. (a) *Le vecteur $u_1$ est non nul et vérifie :*

$$M_a u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -2u_1.$$

*Donc $u_1$ est un vecteur propre de $M_a$ associé à la valeur propre $\lambda = -2$.*

(b) *Pour calculer $E_{-2} = Ker(M_a + 2I_3)$, examinons la matrice :*

$$M_a + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -2a \end{pmatrix}$$

*On a $\mathrm{rg}(M_a + 2I_3) \geq 2$ (puisque deux premières lignes forment une famille libre) donc par le theorème du rang :*

$$\dim(E_{-2}) = 3 - \mathrm{rg}(M_a + 2I_3) \leq 1.$$

*Or, un sous-espace propre n'est jamais nul (par définition d'une valeur propre), donc $\dim(E_{-2}) = 1$.*

*Puisqu'on sait par ailleurs que $u_1 \in E_{-2} \setminus \{0\}$, on en déduit que $\underline{E_{-2} = \mathrm{Vect}(u_1)}$.*

3. (a) *On a :*

$$\chi_{M_a}(X) = \det(XI_3 - M_a) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2a^2 & (4a+a^2) & X+(2a+2) \end{vmatrix}$$

*En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient :*

$$\chi_{M_a}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 2a^2 & 4a+a^2 \end{vmatrix} + (X+2a+2)\begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} = \underline{X^3 + (2a+2)X^2 + (4a+a^2)X + 2a^2}.$$

(b) *Le réel $-a$ est racine double de $M_a$, car*

$$\chi_{M_a}(-a) = -a^3 + (2a+2)a^2 - (4a+a^2)a + 2a^2 = 0,$$
$$\chi'_{M_a}(-a) = 3a^2 - 2a(2a+2) + (4a+a^2) = 0.$$

*Donc $\chi_{M_a}(X)$ est divisible par $(X+a)^2$ : il existe un réel $\gamma$ tel que*

$$\chi_{M_a}(X) = (X+a)^2(X+\gamma),$$

*et par identification du coefficient de degré $0$ dans la forme développée, on obtient $\gamma = 2$, donc $\underline{\chi_{M_a}(X) = (X+a)^2(X+2)}$.*

**Remarque.**

*Calcul astucieux qui permet de factoriser directement le polynôme caractéristique : on sait que $\lambda = -2$ est racine (d'après 2.(a)), donc on fait apparaître $X-2$ en facteur dans la première colonne :*

$$\begin{aligned}
\chi_{M_a}(X) = \det(XI_3 - M_a) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2a^2 & (4a+a^2) & X+(2a+2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+2 & -1 & 0 \\ -2X-4 & X & -1 \\ 4X+8 & (4a+a^2) & X+(2a+2) \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 + 4C_3 \\
&= (X+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & X & -1 \\ 4 & (4a+a^2) & X+(2a+2) \end{vmatrix} \\
&= (X+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & (a+2)^2 & X+(2a+2) \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \\
&= (X+2)(X^2 + 2aX - (4a+4) + (a+2)^2) \\
&= (X+2)(X^2 + 2aX + a^2) \\
&= \underline{(X+2)(X+a)^2}
\end{aligned}$$

(c) • *Si $a=2$, alors $\chi_{M_a}(X)=(X+2)^3$, alors $\mathrm{Sp}(M_a)=\{-2\}$, et l'unique sous-espace propre $E_{-2}$ est de dimension 1 (d'après la question 2.(b)), cette dimension est donc strictement inférieure à la multiplicité (3) de la valeur propre. On en déduit que $M_a$ n'est pas diagonalisable.*

• *Si $a\neq 2$, alors $\mathrm{Sp}(M_a)=\{-2,-a\}$, dans ce cas $M_a$ est diagonalisable ssi $\dim(E_{-a})=2$. Or :*

$$M_a+aI_3=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(a+2)\end{pmatrix}.$$

*Les deux dernières colonnes de $M_a+aI_3$ forment une famille libre donc $\mathrm{rg}(M_a+aI_3)\geq 2$ et ainsi, $\dim(E_{-a})\leq 1$. Comme $-a$ est valeur propre, on a aussi $E_{-a}\neq\{0\}$. On en déduit que $\dim(E_{-a})=1\neq 2$, donc $M_a$ n'est pas diagonalisable.*

4. (a) *Les vecteurs $u_1$ et $u_2$ sont non colinéaires (car non nuls et non proportionnels) et ils appartiennent tous deux au plan $\mathcal{Q}$ (puisque leurs coordonnées vérifient l'équation cartésienne $2y+z=0$).*
*Donc la famille $(u_1,u_2)$ est une base de $\mathcal{Q}$ (puisqu'elle est libre et de cardinal $2=\dim(\mathcal{Q})$).*

(b) *On a $g(u_1)=-2u_1$ (d'après 2.(a)), et $g(u_2)=0$ (la première colonne de $M_0$ étant nulle), donc pour tout vecteur $u=\alpha u_1+\beta u_2\in\mathcal{Q}$, on en déduit par linéarité*

$$g(u)=\alpha g(u_1)+\beta g(u_2)=-2\alpha u_1\in\mathcal{Q},$$

*ce qui montre que $\mathcal{Q}$ est stable par $g$.*

(c) *Puisque $h(u_1)=g(u_1)=-2u_1=-2u_1+0u_2$ et $h(u_2)=g(u_2)=0=0u_1+0u_2$, la matrice de $h$ dans la base $(u_1,u_2)$ est*

$$D=Mat_{(u_1,u_2)}(h)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(d) *On a trouvé une base de $\mathcal{Q}$ dans laquelle $h$ a une matrice diagonale, donc $h$ est diagonalisable. En revanche, $g$ n'est pas diagonalisable puisque sa matrice dans la base canonique $M_0$ ne l'est pas (d'après 3.(c)).*

5. (a) *On cherche $\varepsilon_2=(x,y,z)$ tel que $f(\varepsilon_2)=-2\varepsilon_2+\varepsilon_1$ i.e.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2x+1\\ z &=& -2y-2\\ -8x-12y-6z &=& -2z+4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& -1\\ 2x+y &=& 1\\ 2y+z &=& -2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& -1\\ -2y-z &=& 2\\ 2y+z &=& -2\end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& -1\\ 2y+z &=& -2\end{array}\right.$$

*On trouve finalement (en prenant $z=0$) $\varepsilon_2=(1,-1,0)$.*

**Remarque.**
*Bien entendu, il y a d'autres solutions.*

(b) *On cherche $\varepsilon_3=(x,y,z)$ tel que $f(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_3+\varepsilon_2$ (vu la matrice voulue) i.e.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2x+1\\ z &=& -2y-1\\ -8x-12y-6z &=& -2z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& 0\\ 2x+y &=& 1\\ 2y+z &=& -1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z &=& 0\\ -2y-z &=& 1\\ 2y+z &=& -1\end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$

*On peut finalement choisir (en posant $y=0$) $\varepsilon_3=(1/2,0,-1)$.*
*Par construction, la matrice de $f$ dans la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est la matrice $T$ puisqu'on a :*

$$f(\varepsilon_1)=-2\varepsilon_1,\quad f(\varepsilon_2)=-2\varepsilon_2+\varepsilon_1,\quad f(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_3+\varepsilon_2.$$

* * *

**Seconde partie : programme de TSI 1 (2h)**

* * *

**Corrigé de l'exercice 3 (Ampoules défectueuses).**

1. *Par définition des coefficients binomiaux, on a*

$$Card(\Omega) = \binom{15}{3} = \frac{15 * 14 * 13}{3 * 2 * 1} = 5 * 7 * 13 = \boxed{455}.$$

2. *Signalons d'abord que toutes les combinaisons possibles sont équiprobabables, donc la probabilité de tout événement* $U$ *se calcule via la formule* $\mathbb{P}(U) = \frac{Card(U)}{Card(\Omega)}$.

(a) *Le plus simple est de calculer d'abord la probabilité de l'événement contraire* $\overline{A}$ *(qui correspond à la situation où aucune ampoule piochée n'est défectueuse).* $\overline{A}$ *correspond donc aux combinaisons de* $3$ *ampoules parmi les* $15 - 5 = 10$ *qui fonctionnent. D'où*

$$Card(\overline{A}) = \binom{10}{3} = \frac{10 * 9 * 8}{3 * 2 * 1} = 5 * 3 * 8 = 120.$$

*On en déduit*

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{335}{455} = \boxed{\frac{67}{91}}.$$

(b) $B$ *correspond aux combinaisons de* $3$ *ampoules parmi les* $5$ *défectueuses, donc*

$$Card(B) = \binom{5}{3} = \frac{5 * 4 * 3}{3 * 2 * 1} = 10,$$

*et* $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{455} = \boxed{\frac{2}{91}}$.

(c) $C$ *correspond aux combinaisons de* $3$ *ampoules formées dont* $1$ *est choisie parmi les* $5$ *défectueuses et* $2$ *sont choisies parmi les* $10$ *qui fonctionnent. D'où*

$$Card(C) = \binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 5 \times \frac{10 * 9}{2 * 1} = 5 \times 45 = 225,$$

*ce qui amène*

$$\mathbb{P}(C) = \frac{225}{455} = \boxed{\frac{45}{91}}.$$

3. (a) *On obtient entre* $0$ *et* $3$ *ampoules défectueuses, donc* $\boxed{X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}}$ *(c'est un ensemble à* $4$ *éléments).*

(b) *Calculons* $\mathbb{P}(X = k)$ *pour tout* $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

— *L'événement* $(X = 0)$ *est l'événement* $\overline{A}$*, d'où* $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

— *L'événement* $(X = 1)$ *est l'événement* $C$*, d'où* $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(C) = \frac{45}{91}$.

— *L'événement* $(X = 3)$ *est l'événement* $B$*, d'où* $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B) = \frac{2}{91}$.

— *Il reste à calculer* $\mathbb{P}(X = 2)$. *Puisque les quatre événements* $(X = k)_{0 \leq k \leq 3}$ *forment un système complet d'événements, on a*

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3)) = 1 - \frac{71}{91} = \frac{20}{91}.$$

*On obtient donc la loi de* $X$ *:*

| $k$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | $\frac{24}{91}$ | $\frac{45}{91}$ | $\frac{20}{91}$ | $\frac{2}{91}$ |

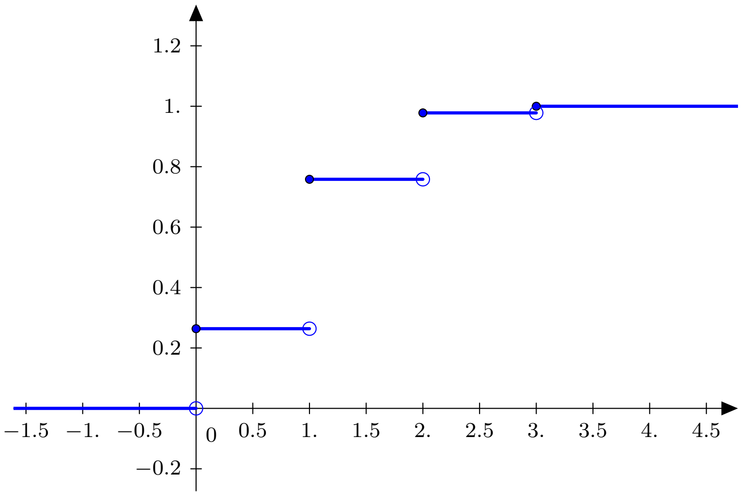
(c) *La fonction de répartition de $X$ est l'application $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

*Puisque $X$ ne prend que les valeurs $0; 1; 2; 3$, on a facilement :*
— *Si $t < 0$, alors $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$.*
— *Si $0 \leq t < 1$, alors $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{24}{91}$.*
— *Si $1 \leq t < 2$, alors $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{69}{91}$.*
— *Si $2 \leq t \leq 3$, alors*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{89}{91}.$$

— *Si $t \geq 3$, alors $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq 3) = 1$.*
*Cela donne le graphe suivant :*




(d) *L'espérance se calcule "par regroupement" selon les valeurs de la variable aléatoire $X$ :*

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

*Ici, cela donne*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(X = k) = 0 * \frac{24}{91} + 1 * \frac{45}{91} + 2 * \frac{20}{91} + 3 * \frac{2}{91} = \frac{45 + 40 + 6}{91} = \boxed{1}.$$

(e) *Par définition, la variance de $X$ vaut $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Mais il vaut mieux utiliser la formule de Huygens :*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

*Pour calculer $E(X^2)$, on utilise le théorème de transfert :*

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X = k) \\ &= 0^2 * \frac{24}{91} + 1^2 * \frac{45}{91} + 2^2 * \frac{20}{91} + 3^2 * \frac{2}{91} = \frac{45 + 80 + 18}{91}. \end{aligned}$$

*Finalement, on a*

$$V(X) = \frac{45 + 80 + 18}{91} - 1^2 = \frac{45 + 80 + 18 - 91}{91} = \frac{52}{91} = \boxed{\frac{4}{7}}.$$

* * *

**Corrigé de l'exercice 4 (Etude d'une fonction).**

1. (a) $f_1$ est définie lorsque $1 - x^2 \geq 0$ c'est-à-dire lorsque $x \in [-1;1]$.
   Le domaine de définition de $f_1$ est donc $[-1;1]$.

   (b) $f_1$ est impaire car son domaine de définition $[-1;1]$ est symétrique par rapport à $0$ et $\forall x \in [-1;1]$, $f_1(-x) = -f_1(x)$.

   (c) $f_1$ est dérivable lorsque $1-x^2 > 0$ (puisque $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $]0;+\infty[$), c'est-à-dire lorsque $x \in ]-1;1[$. La fonction $f_1$ est donc dérivable sur $]-1;1[$.

   (d) Pour tout $x \in ]-1;1[$, on a :

$$\boxed{f_1'(x) =} \; 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

   (e) La fonction $f_1$ étant impaire, on peut déduire le tableau de variations sur $[-1;0]$ à partir du tableau sur $[0;1]$.

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f_1(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

2. Par composition, la fonction $f$ est définie lorsque $f_1$ est définie et pour les valeurs de $x$ pour lesquelles $f_1(x)$ appartient à $[-1;1]$.
   On déduit de l'étude de $f_1$ que le domaine de définition de la fonction $f$ est $[-1;1]$.

3. La fonction $f$ est impaire. En effet, son domaine de définition est symétrique par rapport à $0$ et pour tout réel $x$ dans $[-1;1]$ :

$$f(-x) = \arcsin(2(-x)\sqrt{1-(-x)^2}) = \arcsin(-2x\sqrt{1-x^2}) = -\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = -f(x)$$

   (on utilise le fait que la fonction arc sinus est impaire). On peut donc restreindre l'étude à $[0,1]$. On obtiendra l'autre partie de la courbe par symétrie centrale par rapport à l'origine.

4. Comme la fonction arc sinus est continue sur son ensemble de définition $[-1;1]$ et comme $f_1 : [-1;1] \to [-1;1]$ est continue, on en déduit par composition que $f$ est continue sur $[-1;1]$.

5. Comme la fonction arc sinus est dérivable sur $]-1;1[$, la fonction $f$ est dérivable dès que $f_1$ est dérivable et $f_1(x)$ est différent de $+/-1$. On déduit de l'étude de $f_1$ que c'est le cas lorsque $x$ est différent de $+/-\frac{\sqrt{2}}{2}$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2};1[$.

6. Par dérivation composée, nous avons, pour tout $x \in ]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2};1[$ :

$$f'(x) = \arcsin'(f_1(x)) \times f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f_1^2(x)}} \times \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \times \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Mais $1-4x^2+4x^4 = (1-2x^2)^2$, donc $\sqrt{1-4x^2+4x^4} = \sqrt{(1-2x^2)^2} = |1-2x^2|$, ce qui donne :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|} \times \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in ]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in ]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in ]\frac{\sqrt{2}}{2};1[ \end{cases}}.$$

7. *Dans l'expression de $f'$, on reconnaît la dérivée d'arc sinus (rappel : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$). On déduit donc par intégration :*

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x) + \lambda_1 & si\ x \in ]-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ 2\arcsin(x) + \lambda_2 & si\ x \in ]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ -2\arcsin(x) + \lambda_3 & si\ x \in ]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[ \end{cases}.$$

*Il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs des trois constantes :*

- $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \arcsin(-\sqrt{3} \times \sqrt{1-\frac{3}{4}}) = \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$. *On calcule également* $f(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = -2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \lambda_1 = 2 \times \frac{\pi}{3} + \lambda_1$. *Finalement on obtient :* $\lambda_1 = -\pi$.
- $f(0) = \arcsin(0) = 0$. *On calcule également* $f(0) = 2\arcsin(0) + \lambda_2$ *et on obtient que* $\lambda_2 = 0$.
- *Par symétrie par rapport à l'origine ($f$ impaire), on obtient que* $\lambda_3 = \pi$.

*Finalement :*

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x) - \pi & si\ x \in ]-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ 2\arcsin(x) & si\ x \in ]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[ \\ -2\arcsin(x) + \pi & si\ x \in ]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[ \end{cases}.}$$

*Remarque : puisque $f$ est continue sur $[-1;1]$, ces formules se prolongent aux points de non dérivabilité ($-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$). On aurait donc pu calculer les constantes $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ en utilisant ces valeurs extrêmales. Par exemple, pour le calcul de $\lambda_3$ :*

$$0 = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2\arcsin(x) + \lambda_3) = \lambda_3 - 2\arcsin(1) = \lambda_3 - \pi.$$

8. *Puisque* $\arcsin : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est une bijection strictement croissante, les variations de $f$ sont les mêmes que celles de $f_1$ :*

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

9. *Puisque $f$ est dérivable en 0, la tangente au graphe de $f$ en 0 a pour équation cartésienne :* $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, *c'est-à-dire* $\boxed{y = 2x}$.

* * *

**Corrigé de l'exercice 5 (Distance entre deux droites de l'espace).**

1. *Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a*

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\quad \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x &=& -2+\lambda \\ y &=& 8+5\lambda \\ z &=& 4-\lambda \end{cases},$$

*donc* $\boxed{\begin{cases} x &=& -2+\lambda \\ y &=& 8+5\lambda \\ z &=& 4-\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de } \mathcal{D}}$.

2. *Le vecteur* $\overrightarrow{n}_1 = (1,-1,-1)$ *est normal à* $\mathcal{P}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{n}_2 = (1,0,-2)$ *est normal à* $\mathcal{Q}$*. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *ne sont pas parallèles. Ceci montre que* $\boxed{\text{l'intersection } \mathcal{P}\cap\mathcal{Q} \text{ est une droite, notée } \mathcal{D}'}$*. Soit* $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}$*. On a*

$$M\in\mathcal{D}' \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-y-z & = & 7\\ x-2z & = & 11\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\mu+11\\ y & = & \mu+4\\ z & = & \mu\end{array}\right., \ \mu\in\mathbb{R}.$$

*On reconnaît* $\boxed{\text{les équations paramétriques de la droite } \mathcal{D}' \text{ passant par } B=(11,4,0)}$ $\boxed{\text{et dirigée par } \overrightarrow{v}=(2,1,1)}$.

3. *Si les droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *étaient coplanaires, alors elles seraient toutes les deux incluses dans le plan* $\mathcal{P}_0 := (A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$*, et on aurait* $B\in\mathcal{D}'\subset\mathcal{P}_0$*, donc* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ *coplanaires. Ceci est faux car :*

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 2\\ -4 & 5 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{vmatrix} = 126\neq 0.$$

*Donc* $\boxed{\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ ne sont pas coplanaires}}$.

4. (a) *Puisque* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *ne sont pas coplanaires, elles ne sont pas parallèles et il existe une unique perpendiculaire commune, notée* $\Delta$*. Elle est dirigée par* $\boxed{\overrightarrow{\delta} := \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}6\\-3\\-9\end{pmatrix}}$.

   (b) *Notons* $H=(x,y,z)$ *et* $H'=(x',y',z')$*.*
   *On a :* $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{BH'}=\mu\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{HH'}=\gamma\overrightarrow{\delta}$*, avec* $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$*, soit*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2 & = & \lambda\\ y-8 & = & 5\lambda\\ z-4 & = & -\lambda\\ x'-11 & = & 2\mu\\ y'-4 & = & \mu\\ z' & = & \mu\\ x'-x & = & 6\gamma\\ y'-y & = & -3\gamma\\ z'-z & = & -9\gamma\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda-2\\ y & = & 5\lambda+8\\ z & = & -\lambda+4\\ x' & = & 2\mu+11\\ y' & = & \mu+4\\ z' & = & \mu\\ -\lambda+2\mu-6\gamma & = & -13\\ -5\lambda+\mu+3\gamma & = & 4\\ \lambda+\mu+9\gamma & = & 4\end{array}\right..$$

   *On résout le système formé par les trois dernières équations :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda & + & 2\mu & - & 6\gamma & = & -13\\ -5\lambda & + & \mu & + & 3\gamma & = & 4\\ \lambda & + & \mu & + & 9\gamma & = & 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -1\\ \mu & = & -4\\ \gamma & = & 1\end{array}\right..$$

   *En reportant dans les six premières équations, on obtient :* $\boxed{H=(-3,3,5)}$ *et* $\boxed{H'=(3,0,-4)}$.

5. *La distance cherchée est* $\boxed{HH' = \|\overrightarrow{HH'}\| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}}$.

* * *

**Corrigé de l'exercice 6 (Racines cinquièmes de $-1$).**

1. *Il s'agit de l'équation :* $z^5=-1=e^{i\pi}$*. Les solutions sont donc les nombres complexes unitaires* $e^{\frac{i\pi}{5}+\frac{2ik\pi}{5}}$ *pour* $k$ *un entier entre 0 et 4. On obtient donc l'ensemble de solutions :*

$$\boxed{\{e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{3i\frac{\pi}{5}}; -1; e^{-3i\frac{\pi}{5}}; e^{-i\frac{\pi}{5}}\}}.$$

2. *En développant et en identifiant les coefficients, on obtient que le polynôme* $Q$ *cherché est :* $\boxed{Q(z)=z^4-z^3+z^2-z+1}$.

3. (a) *Le discriminant de* $X^2 - X - 1$ *est* $5$ *donc les racines sont* $\boxed{\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

   (b) *On a :*

$$P(z+\frac{1}{z}) = (z+\frac{1}{z})^2 - (z+\frac{1}{z}) - 1 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} - 1 = \frac{z^4+z^2+1-z^3-z}{z^2} = \frac{Q(z)}{z^2}.$$

   *On en déduit que pour tout* $r \in \mathbb{C}^*$, $\boxed{P(r+\frac{1}{r}) = 0 \iff Q(r) = 0}$, *ce qui prouve l'équivalence demandée.*

   (c) *Puisque* $0$ *n'est pas racine de* $Q$, *la question précédente et l'expression des deux racines de* $P$ *montrent que*

$$Q(z) = 0 \iff z + \frac{1}{z} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \iff z^2 - \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) z + 1 = 0.$$

   *On pose* $\varepsilon = \pm 1$ *et on résout* $z^2 - \frac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0$ *(afin de résoudre les deux équations simultanément) :*

   *Le discriminant est* $\Delta = \frac{(1+\varepsilon\sqrt{5})^2}{4} - 4 = \frac{1+5+2\varepsilon\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-5+\varepsilon\sqrt{5}}{2}$. $\Delta$ *est négatif quelque soit la valeur de* $\varepsilon$.

   *Les racines sont donc :*

$$r_1 = \frac{\frac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{\frac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

   *Les quatre solutions de l'équation* $Q(z) = 0$ *sont donc :*

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2};}$$

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} \quad ; \quad \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2}.}$$

4. *D'après la factorisation de la question 2., les racines de* $Q$ *sont les solutions de* $z^5 + 1 = 0$ *différentes de* $-1$. *En utilisant les questions 1. et 3.(c), on a donc :*

$$\{e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{3i\frac{\pi}{5}}; e^{-3i\frac{\pi}{5}}; e^{-i\frac{\pi}{5}}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$$

*On remarque que* $e^{i\frac{\pi}{5}}$ *et* $e^{-i\frac{\pi}{5}}$ *ont la même partie réelle qui est positive (la partie réelle des deux autres nombres est négative).*

*On déduit que* $\boxed{\cos(\frac{\pi}{5}) = Re(\alpha_1) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

* * *