DS02 du 02/11/20 (4h) - Concours blanc

Le sujet se compose de six exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Première partie : programme de TSI 2 (2h)

* * *

Exercice 1 (Séries de Bertrand).
Dans tout cet exercice, α et β sont deux réels, et on pose pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

On se propose d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ (c'est-à-dire si elle converge ou diverge) selon la valeur de α.

A. Supposons $\alpha > 1$.

1. Soit $\gamma \in]1;\alpha[$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n$?
2. En déduire qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$, tel que $\left(n \geq n_0 \implies u_n \leq \dfrac{1}{n^\gamma}\right)$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$?
4. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^2}$.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

B. Supposons $\alpha < 1$.

6. Donner la limite de nu_n.
7. En déduire qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$, tel que $\left(n \geq n_0 \implies u_n \geq \dfrac{1}{n}\right)$.
8. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$?
9. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.
10. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$.

C. Supposons $\alpha = 1$.

On va maintenant étudier le cas où $\alpha = 1$. Pour cela, on fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_\beta : [2;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\beta(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$.

11. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que f_β est décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
12. Montrer que pour tout entier $k \geq n_0 + 1$, on a
$$\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^k f_\beta(t)dt.$$
13. En déduire que pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, on a
$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt.$$

14. Déterminer une primitive de f_β sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
On distinguera les cas $\beta = 1$ et $\beta \neq 1$.

15. En minorant les sommes partielles, conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ diverge lorsque $\beta \leq 1$.

16. Montrer enfin que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge lorsque $\beta > 1$.

* * *

Exercice 2 (Etude d'une famille de matrices).

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a+a^2) & -(2a+2) \end{pmatrix}$.

1. (a) Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle inversible ?
   (b) Déterminer le rang de M_a lorsque M_a n'est pas inversible.
2. (a) Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a associé à une valeur propre λ que l'on précisera.
   (b) Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.
3. (a) Calculer le polynôme caractéristique de M_a, noté χ_{M_a}.
   On pourra pour l'instant le laisser sous forme développée.
   (b) Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a (c'est-à-dire de multiplicité supérieure ou égale à 2) et factoriser χ_{M_a} au maximum si cela n'a pas été fait à la question précédente.
   (c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, M_a n'est pas diagonalisable.
   On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.
4. **Etude du cas particulier $a = 0$.**
   Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le plan $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $2y + z = 0$.
   (a) On rappelle que $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et on pose $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathcal{Q}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{Q}$ est stable par g.
   On note h la restriction de g au sous-espace $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire que $h : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ et $\forall u \in \mathcal{Q}$, $h(u) = g(u)$.
   (c) Déterminer la matrice de h dans la base (u_1, u_2).
   (d) L'endomorphisme h est-il diagonalisable ? Et l'endomorphisme g ?
5. **Etude du cas particulier $a = 2$.**
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\varepsilon_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.
   (b) Montrer qu'il existe un vecteur ε_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

* * *

Seconde partie : programme de TSI 1 (2h)

* * *

Exercice 3 (Ampoules défectueuses).
On prend au hasard, **en même temps**, trois ampoules dans un lot de quinze dont cinq sont défectueuses. Cette expérience aléatoire est modélisée par un univers Ω, qui est l'ensemble de toutes les combinaisons à 3 éléments d'un ensemble à 15 éléments.
Attention : on rappelle que dans une combinaison, l'ordre des éléments ne compte pas, cela traduit ici le fait que les trois ampoules sont choisies simultanément.

1. Calculer $Card(\Omega)$ (c'est-à-dire le nombre de cas possibles).
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   On donnera les résultats sous la forme de fractions ayant pour dénominateur $91 = 13 * 7$.
   (a) A : au moins une ampoule sur les trois est défectueuse.
   (b) B : les trois ampoules sont défectueuses.
   (c) C : exactement une ampoule est défectueuse.
3. On considère la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui représente le nombre d'ampoules défectueuses qu'on obtient.
   (a) Déterminer l'ensemble image $X(\Omega)$ (c'est-à-dire les valeurs prises par X).
   (b) Déterminer la loi de X, c'est-à-dire déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   On pourra présenter le résultat sous la forme d'un tableau.
   (c) Tracer la fonction de répartition de X, c'est-à-dire la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$
   On ne s'embêtera pas avec l'échelle, on indiquera seulement les valeurs importantes sur le graphe !
   (d) Déterminer l'espérance de X.
   (e) Déterminer la variance de X.

* * *

Exercice 4 (Etude d'une fonction).
On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. On étudie d'abord la fonction $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f_1.
   (b) La fonction f_1 est-elle paire ? impaire ?
   (c) Déterminer le domaine sur lequel f_1 est dérivable.
   (d) Calculer f_1'.
   (e) Dresser le tableau de variations de f_1.
2. Déterminer le domaine de définition de f.
3. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
4. Déterminer le domaine sur lequel f est continue.
5. Déterminer le domaine sur lequel f est dérivable.
6. Calculer f'.
   Indication : pour simplifier le calcul, on pourra factoriser $1 - 4x^2 + 4x^4$.
7. En déduire une expression simplifiée de la fonction f sur chaque intervalle où elle est dérivable.
8. Dresser le tableau de variations de f (on calculera les valeurs de f aux points remarquables).
9. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = 0$.

* * *

Exercice 5 (Distance entre deux droites de l'espace).
On munit l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2; 8; 4)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ ayant pour coordonnées $(1; 5; -1)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
   Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.
2. On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations cartésiennes :
   $$\mathcal{P} : x - y - z = 7, \qquad \mathcal{Q} : x - 2z = 11.$$
   Justifier que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite, que l'on notera $\mathcal{D}'$, et déterminer une représentation paramétrique de cette droite.
3. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
4. On considère Δ, la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
   (a) Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}$ de Δ.
   (b) Déterminer les points d'intersection H et H' de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
5. Calculer la distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

* * *

Exercice 6 (Racines cinquièmes de -1).

1. Déterminer les solutions complexes de $z^5 + 1 = 0$ sous forme exponentielle.
2. Soient a, b, c trois réels. On pose $Q(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + 1$. Déterminer a, b, c pour que
   $$z^5 + 1 = (z + 1)Q(z).$$
3. L'objectif de cette question est de résoudre l'équation $Q(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
   (a) On note P le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$. Déterminer les racines (réelles ou complexes) de P.
   (b) Pour tout $r \in \mathbb{C}^*$: montrer que r est une racine de Q si et seulement si $r + \frac{1}{r}$ est une racine de P.
   (c) En déduire l'ecriture algébrique des solutions de l'équation $Q(z) = 0$.
4. Utiliser les questions précédentes pour déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

* * *