Corrigé du DS1 du 19/09/20 (4h)

Corrigé de l'exercice 1 (Etude d'une suite récurrente). *1. Montrons par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$.

- *C'est vrai pour* $n = 0$ *car* $u_0 = \frac{\pi}{2}$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$. *Vu que la fonction* sin *est strictement croissante sur* $[0; \frac{\pi}{2}]$, *on obtient que* $\sin(0) < \sin(u_n) \leq \sin(\frac{\pi}{2})$, *c'est-à-dire* $0 < u_{n+1} \leq 1$.
  Mais $1 \leq \frac{\pi}{2}$, *donc* $0 < u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$, *ce qui montre que la propriété est héréditaire.*

Le théorème de récurrence permet alors de conclure que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}}$.

2. *La fonction* $\varphi : x \mapsto x - \sin(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $\varphi' : x \mapsto 1 - \cos(x)$.
On a $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}],\ \varphi'(x) > 0$ *(car* $\cos(x) < 1$*), donc* φ *est strictement croissante sur* $[0; \frac{\pi}{2}]$.
Vu que $\varphi(0) = 0$, *on en déduit que* $\boxed{\varphi(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]0; \frac{\pi}{2}]}$, *ce qui montre bien l'inégalité voulue.*

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Puisque* $u_n \in]0; \frac{\pi}{2}]$ *(d'après la question 1.), on déduit de la question 2. que* $\sin(u_n) < u_n$, *c'est-à-dire* $u_{n+1} < u_n$. *Ceci montre que* $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

4. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\boxed{\text{décroissante}}$ *(d'après 3.)* $\boxed{\text{et minorée}}$ *(par* 0*, d'après 1.), donc* $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell}$.

5. *Puisque* $u_n \in]0; \frac{\pi}{2}]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on peut affirmer que* $\ell \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(u_n) = \sin(\ell)$ *(par continuité de la fonction* sin*), donc par unicité de la limite, on en déduit (puisque* $u_{n+1} = \sin(u_n)$*) que* $\boxed{\sin(\ell) = \ell}$.
D'après l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto x - \sin(x)$ *faite à la question 2., on en déduit que* $\boxed{\ell = 0}$ *(puisque* 0 *est la seule solution de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *sur l'intervalle* $[0; \frac{\pi}{2}]$*).*

6. *Puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *on a* $\boxed{\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)}$, *donc*

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \sin(u_n)^{-2} - u_n^{-2} = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)\right)^{-2} - u_n^{-2}.$$

En factorisant par u_n^{-2} *et en utilisant que* $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, *on a alors*

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = u_n^{-2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)\right)^{-2} - 1\right) = u_n^{-2}\left(1 + \frac{2u_n^2}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2) - 1\right),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1),$$

ce qui montre que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}) = \frac{1}{3}}$.

7. *C'est un téléscopage classique :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2})} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} u_k^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k^{-2} = \boxed{u_n^{-2} - u_0^{-2}.}$$

8. *On applique le théorème de Cesàro à la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$, *qui converge vers* $\frac{1}{3}$ *d'après la question 6. On obtient ainsi :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}) = \frac{1}{3},$$

ce qui donne l'équivalent : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}}$*. En utilisant la simplication téléscopique de la question 7., on obtient finalement* $\boxed{\dfrac{1}{u_n^2}-\dfrac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}}$.

9. *Puisque* u_n^2 *tend vers* 0 *en prenant des valeurs positives, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n^2}=+\infty$*, donc la constante* $-\frac{1}{u_0^2}$ *est négligeable devant* $\frac{1}{u_n^2}$*. On a donc* $\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$*, d'où l'équivalence* $\boxed{\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}}$ *d'après la question 8. Enfin, on utilise la compatibilité des équivalents avec les puissances :*

$$u_n=\left(\frac{1}{u_n^2}\right)^{-1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-1/2},$$

ce qui montre que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$.

10. *Soit un réel* $\varepsilon>0$*. On va montrer qu'il existe* $n_0\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $n\geq n_0 \Longrightarrow |S_n-\ell|\leq\varepsilon$ *(c'est la définition de la convergence d'une suite).*
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$*, on a*

$$|S_n-\ell|=\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)-\ell\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ell\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n (u_k-\ell)\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n|u_k-\ell|.$$

L'idée est alors de couper la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n|u_k-\ell|$ *en deux :*

- *Pour* k *suffisamment grand (supérieur à un certain entier* $n_1\in\mathbb{N}^*$*), on peut majorer* $|u_k-\ell|$ *par* ε*, puisque la suite* (u_k) *converge vers* ℓ*. D'où l'inégalité :*

$$\forall n\geq n_1,\qquad \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^n|u_k-\ell|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^n\varepsilon=\left(\frac{n-n_1+1}{n}\right)\times\varepsilon.$$

- *Pour les valeurs de* k *"petites" (comprises entre* 1 *et* n_1-1*), la présence du facteur* $\frac{1}{n}$ *rend le terme* $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1-1}|u_k-\ell|$ *petit.*

On a donc :

$$\boxed{\exists n_1\in\mathbb{N}^*,\qquad n\geq n_1\Longrightarrow|S_n-\ell|\leq\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_1-1}|u_k-\ell|+\sum_{k=n_1}^n|u_k-\ell|\right)\leq\frac{C}{n}+\left(\frac{n-n_1+1}{n}\right)\times\varepsilon},$$

où $C=\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1-1}|u_k-\ell|$ *dépend de* n_1 *(et donc de* ε*) mais pas de* n*. Continuons à majorer ceci :*

- *Puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{C}{n}=0$*, il existe un entier* $n_2\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $n\geq n_2\Longrightarrow\frac{C}{n}\leq\varepsilon$.
- *Puisque* $n_1\geq1$*, on a* $\frac{n-n_1+1}{n}\leq1$.

Donc

$$\boxed{n\geq\max(n_1,n_2)\Longrightarrow|S_n-\ell|\leq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon}.$$

En posant $\boxed{n_0=\max(n_1,n_2)}$*, on a donc montré que* $\boxed{n\geq n_0\Longrightarrow|S_n-\ell|\leq2\varepsilon}$.
Vu que le réel $\varepsilon>0$ *était quelconque, on aurait pu dès le début remplacer* ε *par* $\varepsilon/2$*, et du coup on obtient le résultat voulu.*

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Utilisations du téléscopage).

<u>Partie A</u> : *Un classique*

1. *Pour tous réels a, b et pour tous entiers $k \geq 4$, nous avons :*

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-3} = \frac{(a+b)k - 3a}{k(k-3)}.$$

donc l'égalité annoncée a lieu si et seulement si $a + b = 0$ et $-3a = 1$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

2. *D'après la question précédente, on obtient par linéarité des sommes finies :*

$$\forall n \geq 4, \qquad S_n = \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{-1/3}{k} + \frac{1/3}{k-3} \right) = \frac{1}{3} \left(-\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k-3} \right).$$

En effectuant le changement d'indice $k \leftarrow k-3$ dans la deuxième somme, ceci se réécrit :

$$\forall n \geq 4, \qquad S_n = \frac{1}{3} \left(-\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

(par téléscopage), c'est-à-dire

$$\forall n \geq 4, \qquad S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

3. *On déduit de l'expression de S_n obtenue à la question précédente que la suite (S_n) converge vers $\frac{11}{18}$ (puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = 0$).*
Ceci montre que la série $\sum\limits_{k \geq 4} \frac{1}{k(k-3)}$ converge et que $S = \frac{11}{18}$.

<u>Partie B</u> : *La formule de Stirling*

4. *Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = e^{-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}},$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1.$$

Or, nous avons $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc

$$\begin{aligned} v_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^3} \right) - 1 . \\ &= \frac{1}{12n^2} + \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

5. *La série de Riemann $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{12} \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), donc d'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs et d'après le résultat de la question précédente, la série $\sum\limits_{k \geq 1} v_k$ est convergente.*

6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$$

(par téléscopage).

7. *Puisque la série $\sum_{k\geq 1} v_k$ converge (d'après la question 5.), la somme $\sum_{k=1}^{n} v_k$ possède une limite finie, notée $\ell \in \mathbb{R}$, lorsque $n \to +\infty$.*
D'après la simplification obtenue à la question 6., on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_1)) = \ell$, et donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = e^{\ell+\ln(u_1)} > 0$. Ceci montre bien que u_n possède une limite strictement positive lorsque $n \to +\infty$.

8. *D'après la question précédente, il existe $L > 0$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$. On a donc*

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{L},$$

c'est-à-dire (en multipliant par $n^n e^{-n}\sqrt{n}$) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{L}.$$

Ceci montre donc la formule de Stirling en posant $C = \frac{1}{L} > 0$.

<u>Partie C</u> *: Calcul de la somme d'une suite définie par récurrence*

9. *Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.*
   - *C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1 > 0$.*
   - *Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $u_n > 0$. Vu que $u_{n+1} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right) u_n$ et que $n+a > 0$ et $n+b > 0$, on en déduit que $u_{n+1} > 0$ (par produit et quotient de réels strictement positifs).*

   Par le théorème de récurrence, on a donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. *Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.*

11. *Tout d'abord, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{b-a} \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1},$$

donc en passant au logarithme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le développement limité $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{O}(x^2)$:

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{b-a}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{a}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{b}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

12. *D'après la question précédente, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)| = \left|\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right| \leq \frac{M}{k^2}$. Puisque la série $\sum_{k\geq 1} \frac{M}{k^2}$ converge, on en déduit par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs que la série $\sum_{k\geq 1} |\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)|$ converge, ce qui entraîne que la série $\sum_{k\geq 1} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k))$ converge (puisque la convergence absolue entraîne la convergence).*

13. *Par téléscopage, on a* $\sum_{k=1}^{n}(\ln(v_{k+1})-\ln(v_k))=\ln(v_{n+1})-\ln(v_1)$*, et ces sommes partielles possèdent une limite finie lorsque* $n\to+\infty$ *d'après la question précédente. Donc la suite* $(\ln(v_{n+1})-\ln(v_1))$ *converge vers une limite réelle notée* ℓ*.*
Ceci entraîne que la suite $(\ln(v_n))$ *est convergente, et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n)=\ell+\ln(v_1)=\ell+\ln(u_1)$*.*

14. *D'après la question précédente et la continuité de la fonction exponentielle, on obtient que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e^{\ell+\ln(u_1)}>0$*. En notant* λ *cette limite strictement positive et en revenant à la définition de* v_n*, on a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{b-a}u_n=\lambda$*, et donc* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{b-a}}$*.*

15. *L'équivalence précédemment obtenue montre que la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est de même nature que la série de Riemann* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\lambda}{n^{b-a}}$ *(en vertu du critère des équivalents pour les séries à termes positifs). Puisque* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\lambda}{n^{b-a}}$ *converge si et seulement si* $b-a>1$*, on en conclut que* $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *converge si et seulement si* $b-a>1$*.*

16. *On a* $(k+b)u_{k+1}=(k+a)u_k$ *pour tout* $k\in\mathbb{N}$*, donc pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n}(k+b)u_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k.$$

En effectuant le changement d'indice $k\leftarrow k+1$ *dans la première somme, ceci se réécrit :*

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1+b)u_k=\sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1+b)u_k-\sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k=0.$$

En isolant le dernier terme de la première somme, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1+b)u_k-\sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k+(n+b)u_{n+1}=0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1+b)u_k-\sum_{k=0}^{n}(k+a)u_k+(n+b)u_{n+1}-(-1+b)u_0=0.$$

On regroupe enfin les deux sommes, et on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1+b-k-a)u_k+(n+b)u_{n+1}=b-1,$$

c'est-à-dire

$$(b-a-1)\sum_{k=0}^{n}u_k+(n+b)u_{n+1}=b-1.$$

17. *Il ne reste plus qu'à faire tendre* $n\to+\infty$ *dans la formule établie à la question précédente : l'équivalent de* u_n *trouvé à la question 14. montre que*

$$(n+b)u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}(n+b)\frac{\lambda}{(n+1)^{b-a}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\lambda}{n^{b-a-1}},$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+b)u_{n+1}=0$ *puisque* $b-a-1>0$ *(d'après 15.).*
Finalement :

$$(b-a-1)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k+\lim_{n\to+\infty}(n+b)u_{n+1}=b-1,$$

c'est-à-dire

$$(b-a-1)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = b-1,$$

ce qui montre que $S = \frac{b-1}{b-a-1}$.

* * *

Corrigé de l'exercice 3 (Etude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$).

Partie A : Généralités sur u

1. *Si* $y \in Im(u)$*, alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$*. D'où* $u(y) = u(u(x)) = (u \circ u)(x) = 0_E$ *(puisque par hypothèse* $u \circ u$ *est l'endomorphisme nul), c'est-à-dire* $y \in Ker(u)$*. Ceci montre l'implication* $y \in Im(u) \Longrightarrow y \in Ker(u)$*, et donc l'inclusion* $Im(u) \subset Ker(u)$*.*
2. *D'après le théorème du rang appliqué à u, on a*
$$p + r = \dim(E) = n.$$
D'autre part, puisque $Im(u) \subset Ker(u)$*, on a* $\dim(Im(u)) \leq \dim(Ker(u))$*, c'est-à-dire* $r \leq p$*. On en déduit les inégalités*
$$2p \geq p + r = n, \qquad 2r \leq p + r = n,$$
ce qui montre le résultat.

Partie B : Le cas $n = 2$

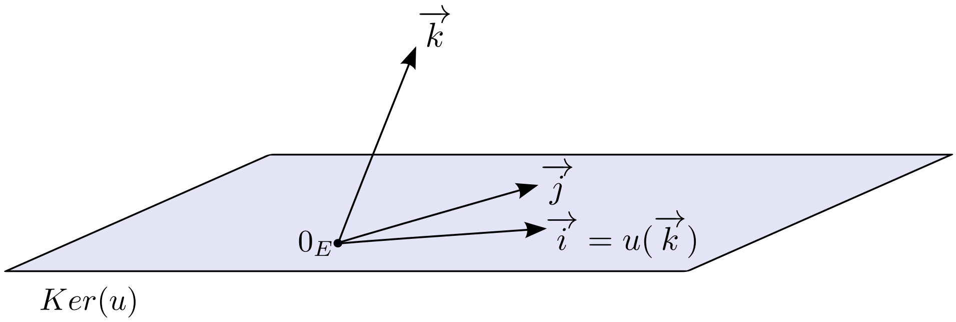
3. *La question précédente fournit* $r \leq \frac{2}{2} = 1$*. Or, puisque u n'est pas l'endomorphisme nul, son image n'est pas l'espace vectoriel nul, et donc* $r = \dim(Im(u)) \geq 1$*. On en déduit* $r = 1$*. Par le théorème du rang, on récupère* $p = 2 - r = 1$*.*
On sait déjà que $Im(u) \subset Ker(u)$*. Vu qu'en plus ces deux sous-espaces de E ont même dimension* ($r = p = 1$)*, on en déduit qu'ils sont égaux.*
4. *Vu que* $\dim(E) = 2$*, il suffit de montrer que la famille* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *est libre. Soient deux réels* (α, β) *tels que*
$$\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}.$$
On a alors, en appliquant u,
$$\alpha u(\overrightarrow{i}) + \beta u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0},$$
c'est-à-dire
$$\alpha(u \circ u)(\overrightarrow{j}) + \beta\overrightarrow{i} = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0},$$
ou encore (puisque $u \circ u = 0$*) :*
$$\beta\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0}.$$
Le vecteur $\overrightarrow{i}$ *étant non nul, cela entraîne* $\beta = 0$*. En reportant dans l'égalité de départ, on a*
$$\alpha\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0},$$
et donc (puisque $\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$*),* $\alpha = 0$*. Ceci montre que la famille* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *est libre, c'est donc une base de E.*
5. *On a* $u(\overrightarrow{i}) = u(u(\overrightarrow{j})) = \overrightarrow{0}$*, et* $u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$*, donc*
$$Mat_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie C : Le cas $n = 3$

6. *D'après la question 2., on a* $r \leq \frac{3}{2}$*. Mais* u *n'est pas nul, donc* $r \geq 1$*. Vu que* r *est un entier, on en déduit que* $r = 1$*. Enfin, par le théorème du rang, on a*

$$\dim(Ker(u)) = p = n - r = 3 - 1 = 2.$$

7. *Tout d'abord, on a* $\overrightarrow{i} \in Ker(u)$ *car* $u(\overrightarrow{i}) = u(u(\overrightarrow{k})) = \overrightarrow{0}$*. Puisque le sous-espace vectoriel* $Ker(u)$ *est de dimension* 2*, on peut compléter la famille* $(\overrightarrow{i})$ *(qui est libre car* $\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$*) en une base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *de* $Ker(u)$*. Un tel vecteur* $\overrightarrow{j}$ *est donc non colinéaire à* $\overrightarrow{i}$*.*
8. *Dessin des vecteurs* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *:*



9. *La famille* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *est libre (c'est une base de* $Ker(u)$*), et* $\overrightarrow{k}$ *n'est pas combinaison linéaire de* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, sinon on aurait* $\overrightarrow{k} \in Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, c'est-à-dire* $\overrightarrow{k} \in Ker(u)$*, ce qui est faux par hypothèse. Donc la famille* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *est libre. Vu que* $\dim(E) = 3$*, cette famille de cardinal* 3 *est donc une base de* E*.*
10. *On a* $u(\overrightarrow{i}) = u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0}$*, car* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *sont dans* $Ker(u)$*. Ensuite,* $u(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i}$*, donc*

$$Mat_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Partie D</u> *: Etude d'un exemple*

11. *On a* $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Or, $J^2 = Mat_{\mathcal{B}}(v \circ v)$*, donc on en déduit que* $v \circ v$ *est l'endomorphisme nul.*
12. *On a, pour tout* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $v(X) = JX = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -2x + 2y + 2z \\ x - y - z \end{pmatrix}$*, donc*

$$X \in Ker(v) \iff \begin{cases} -x + y + z & = 0 \\ -2x + 2y + 2z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \end{cases} \iff -x + y + z = 0,$$

et ceci équivaut encore à $X = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *avec* $(y, z) \in \mathbb{R}^2$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *engendre donc* $Ker(v)$*, et elle est libre, car*

$$X = 0 \Longrightarrow y = z = 0.$$

D'où $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $Ker(v)$*, qui est donc de dimension* 2*.*

13. *Puisque l'endomorphisme v est canoniquement associé à la matrice J, $Im(v)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de J. On a donc*

$$Im(v) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $Im(v)$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est un sous-espace de dimension 1 (ce qui confirme bien les résultats obtenus dans la partie précédente).

14. *Posons $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{k} \notin Ker(v)$, car $v(\overrightarrow{k}) = J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.*

On pose $\overrightarrow{i} = v(\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{i} \in Ker(v)$, car $v \circ v = 0$.

Ensuite, on choisit un vecteur $\overrightarrow{j}$ de $Ker(u)$ non colinéaire à $\overrightarrow{i}$: par exemple $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après les résultats de la partie C, la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est J'.

15. *P est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On a donc*

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a la relation $J' = P^{-1}JP$.

16. *On a, pour tous vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$:*

$$PX = Y \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \\ -2x_1 + x_2 & = y_2 \\ x_1 & = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 & = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 & = y_2 + 2y_3 \\ x_1 & = y_3 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} Y,$$

ce qui prouve que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a bien

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J'.$$