DS01 du 19/09/20 (4h)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.
Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Etude d'une suite récurrente).
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Première partie : étude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0; \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) < x$.
   On pourra étudier pour cela la fonction $\varphi : x \mapsto x - \sin(x)$.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
5. Montrer que $\ell = 0$.

Seconde partie : détermination d'un équivalent de u_n

6. En utilisant les développements limités de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto (1+x)^{-2}$ en 0, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}) = \frac{1}{3}.$$
   On pourra mettre en facteur u_n^{-2} dans l'expression.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2})$.
8. On admet le théorème suivant :

   Théorème 1 (Moyenne de Cesàro).
   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ converge aussi vers ℓ.

   En utilisant ce théorème, montrer que $\displaystyle\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$.
9. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
10. (*) Démontrer le théorème de Cesàro.
    Indication : revenir à la définition de la convergence "avec les epsilon".

* * *

Exercice 2 (Utilisations du téléscopage).

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A : Un classique

Le but est de montrer que la somme $S = \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{k(k-3)}$ existe et de calculer sa valeur.

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall k \geq 4, \qquad \frac{1}{k(k-3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-3}.$$
2. Pour tout entier $n \geq 4$, on pose $S_n = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k-3)}$.
Déduire de la question précédente une simplification de S_n.
3. Montrer que la série $\sum_{k\geq 4} \frac{1}{k(k-3)}$ converge et calculer S.

Partie B : La formule de Stirling

Le but est de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.
Pour cela, on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}, \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

4. En utilisant des développements limités, montrer que $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Quelle est la nature (convergente ou divergente ?) de la série $\sum_{k\geq 1} v_k$?
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} v_k$.
7. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.
8. Conclure.

On peut en fait montrer que $C = \sqrt{2\pi}$ en utilisant les "intégrales de Wallis".

Partie C : Calcul de la somme d'une suite définie par récurrence

On fixe deux réels $a > 0$, $b > 0$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :
$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right) u_n.$$

9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
10. Le critère de d'Alembert permet-il de conclure quant à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$?

On va déterminer un équivalent simple de u_n. Pour cela, on considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = n^{b-a} u_n.$$

11. En utilisant des développements limités, montrer que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
12. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k))$?
13. En déduire que la suite $(\ln(v_n))$ est convergente.
14. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{b-a}}$.
15. Pour quelles valeurs de a et b la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle ?

Dans la suite, on suppose que a et b sont choisis tels que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

16. En utilisant la relation $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+b)u_{k+1} = (k+a)u_k$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (b-a-1)\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + (n+b)u_{n+1} = b-1.$$

17. En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

* * *

Exercice 3 (Etude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle que l'on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
On rappelle aussi qu'étant donnée une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ de E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ désigne la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice carrée $n \times n$ dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs $f(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **non nul** de E tel que $\boxed{\boldsymbol{u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$
($0_{\mathcal{L}(E)}$ désigne l'endomorphisme nul). On note r le rang de u et p la dimension du noyau de u :

$$r = \dim(Im(u)), \qquad p = \dim(Ker(u)).$$

<u>Partie A</u> : Généralités sur u

1. Montrer que $Im(u) \subset Ker(u)$.
2. En déduire que $r \leq \dfrac{n}{2}$ et $p \geq \dfrac{n}{2}$.

<u>Partie B</u> : Le cas $n = 2$

Ici, on suppose $\boldsymbol{n = 2}$.

3. Justifier que $Im(u) = Ker(u)$.
4. Soient $\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur de E tel que $\overrightarrow{i} \in Im(u)$ et soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur de E tel que $u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$. Montrer que la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est libre, puis que c'est une base de E.
5. Ecrire la matrice de u dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

<u>Partie C</u> : Le cas $n = 3$

Ici, on suppose $\boldsymbol{n = 3}$.

6. Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $Ker(u)$?
7. Soit $\overrightarrow{k} \in E$ un vecteur n'appartenant pas à $Ker(u)$, et soit $\overrightarrow{i} = u(\overrightarrow{k})$. Justifier que $\overrightarrow{i} \in Ker(u)$, puis qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{j} \in Ker(u)$ tel que $\overrightarrow{j}$ est non colinéaire à $\overrightarrow{i}$.
8. Positionner $Ker(u)$ et $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sur un dessin.
9. Montrer que la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est libre, puis que c'est une base de E.
10. Ecrire la matrice de u dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

<u>Partie D</u> : Etude d'un exemple

On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $J = Mat_{\mathcal{B}}(v)$.

11. Vérifier que $v \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

12. Déterminer une base de $Ker(v)$ et sa dimension.
13. Déterminer une base de $Im(v)$ et sa dimension.
14. En utilisant la partie C, trouver une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans laquelle la matrice de v est

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra prendre $\overrightarrow{k} = (1, 0, 0)$.

15. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et donner une formule reliant les matrices J, J', P.
16. Calculer P^{-1} et vérifier par le calcul le résultat précédent.