Centrale-Supélec 2014
Filière TSI
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Damien Broizat
TSI 2 Lycée Jules Ferry, Cannes

I Polynômes et nombres de Bernoulli

***I.A* - I.A.1)** On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ et on procède par analyse-synthèse :

- Si P se décompose sous la forme $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en intégrant sur $[0,1]$, on obtient (par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_0^1 P(x)dx = \underbrace{\int_0^1 Q(x)dx}_{=0} + \int_0^1 \lambda dx = \lambda,$$

et donc

$$Q = P - \lambda = P - \int_0^1 P(x)dx.$$

Ceci montre (sous réserve d'existence) l'unicité de la décomposition.

- La décomposition précédemment obtenue convient car en posant $Q = P(t) - \int_0^1 P(x)dx$ et $\lambda = \int_0^1 P(x)dx$, on a
  - * $P = Q + \lambda$,
  - * $\lambda \in \mathbb{R}$,
  - * $Q \in H$ car $\int_0^1 Q(x)dx = \int_0^1 (P(x) - \lambda)\, dx = \int_0^1 P(x)dx - \lambda = 0.$

On en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique couple } (Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R} \text{ tel que } P = Q + \lambda}$.

I.A.2) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Cette fonction polynomiale possède une primitive (elle-même polynomiale), notée P. D'après la question précédente, on peut écrire $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où :

$$R = P' = (Q + \lambda)' = Q' + \underbrace{\lambda'}_{=0} = D(Q),$$

ce qui montre que tout $R \in \mathbb{R}[X]$ possède un antécédent dans H par D, c'est-à-dire $\boxed{D \text{ surjective}}$.

I.A.3) En plus d'être linéaire et surjective, l'application D est injective car son noyau est nul. En effet, si $P \in H$ et $D(P) = 0$, alors P est constant et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc nul. D est donc une bijection linéaire, c'est-à-dire $\boxed{\text{un isomorphisme}}$.

I.A.4) a) La fonction Q est polynomiale car c'est manifestement une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale P (elle est de la forme $x \mapsto \int_0^x P(t)dt + cste$).

Ensuite, en décomposant P suivant la base monomiale ($P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et les a_k réels), on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k\right) dt + \int_0^1 (t-1)\left(\sum_{k=0}^{d} a_k t^k\right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\int_0^x t^k dt\right) + \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^1 (t^{k+1} - t^k) dt \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right). \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 Q(x)dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 Q(x)dx = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\frac{-1}{(k+2)(k+1)}\right) = 0,$$

et donc $\boxed{Q \in H}$.

b) Q est un polynôme de H tel que $Q' = P$, c'est donc (d'après **I.A.3)**) l'unique polynôme de H vérifiant cette propriété, et donc $\boxed{Q = \varphi(P)}$.

I.B **- I.B.1)** Pour tout réel x, on a, en utilisant la question **I.A.4)** :

$$B_1(x) = \varphi(B_0)(x) = \int_0^x dt + \int_0^1 (t-1)dt = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = \varphi(B_1)(x) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + \int_0^1 (t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

donc $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$ et $\boxed{B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}(X^2 - X + \frac{1}{6})}$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est une primitive de B_n, donc

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B_n(x)dx.$$

Mais puisque $\varphi(\mathbb{R}[X]) = H$, on a $B_n \in H$ pour tout $n \geq 1$, donc $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $\boxed{\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)}$.

I.C **- I.C.1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$C'_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^{n+1} B_{n+1}(1-x)\right) = (-1)^{n+2} B'_{n+1}(1-x).$$

Mais B_{n+1} est une primitive de B_n, donc

$$C'_{n+1}(x) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x),$$

ce qui montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C'_{n+1} = C_n}$.

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme C_{n+1} est dans H car

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(1-x)dx = (-1)^{n+1} \int_1^0 B_{n+1}(y)(-dy)$$

(avec le changement de variable $y = 1 - x$), c'est-à-dire

$$\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(y)dy,$$

et $B_{n+1} = \varphi(B_n)$ est dans H, donc $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(y)dy = 0$, ce qui entraîne $\displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(x)dx = 0$.

Or, d'après la question précédente, C_{n+1} est une primitive de C_n.

D'après **I.A.3)**, le polynôme C_{n+1} est donc la seule primitive de C_n qui est dans H, c'est-à-dire $\boxed{C_{n+1} = \varphi(C_n)}$.

I.C.3) On a $C_0 = B_0 = 1$ et $\begin{cases} C_{n+1} = \varphi(C_n) \\ B_{n+1} = \varphi(B_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc une récurrence triviale montre que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie $(-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$, et donc (en multipliant par $(-1)^n$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)}.$$

I.C.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation précédemment obtenue implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{2n+1}(1-x) = -B_{2n+1}(x).$$

En évaluant en $x = 0$, cela donne $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$.

Mais $2n + 1 \geq 3$, donc d'après **I.B.2)**, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$.

On déduit de ces deux relations $\boxed{B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0}$.

I.D **-** Le programme suivant, écrit en `Maple`, calcule et affiche la valeur de $B_n(x)$ pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ donnés :

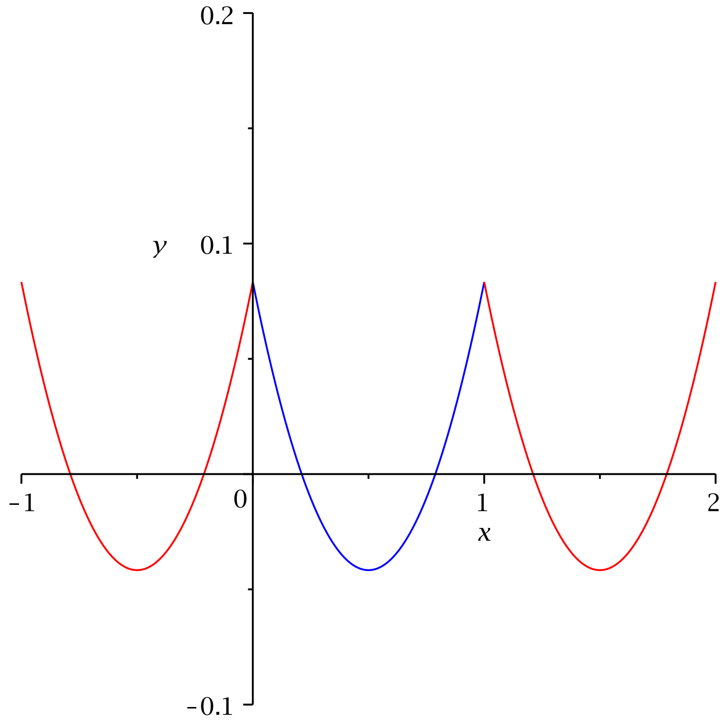
```
Bern:= proc(n,x)
local k, B, expr, y;
B:= t->1;
# on initialise B avec la fonction constante égale à 1 (pas le nombre 1 !)
for k from 1 to n
  do
  expr:= int(B(t), t=0..y)+int((t-1)*B(t), t=0..1);
  # attention, la variable 'x' ne doit pas être utilisée ici !
  B:= unapply(expr, y);
  # pour transformer l'expression calculée en fonction de la variable y
  end do;
print(B(x));
# on affiche la valeur de la fonction B au point x
end proc;
```

II Développement de Fourier

II.A **- II.A.1)** D'après **I.B.1)**, on a $\forall x \in]0,1[$, $\overline{B_2}(x) = B_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}$, et

$$\overline{B_2}(0) = \frac{B_2(0) + B_2(1)}{2} = \frac{1}{12} = B_2(0).$$

Le graphe de la restriction de $\overline{B_2}$ à $[0;1[$ est donc une parabole, qu'on prolonge par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$.



II.A.2) Vu que $\overline{B_2}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$ pour tout $x \in]0;1[$, la fonction $\overline{B_2}$ est continue sur $]0;1[$ (car polynomiale). En outre, $\lim\limits_{x\to 0^+} \overline{B_2}(x) = \dfrac{1}{12} = \overline{B_2}(0)$, et par périodicité, $\lim\limits_{x\to 0^-} \overline{B_2}(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \overline{B_2}(x) = \dfrac{1}{12} = \overline{B_2}(0)$, donc $\overline{B_2}$ est continue en 0. Par périodicité, on en déduit que $\boxed{\overline{B_2} \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.
En outre, la restriction de $\overline{B_2}$ à l'intervalle $]0;1[$ est de classe C^1 (c'est un polynôme), et se prolonge en une fonction polynomiale sur $[0;1]$, qui est donc de classe C^1 sur $[0;1]$.
On en déduit par périodicité que $\boxed{\overline{B_2} \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}}$.
En revanche, $\boxed{\overline{B_2} \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ car elle n'est même pas dérivable en 0, puisque

$$\forall h \in]0;1[, \quad \begin{cases} \frac{\overline{B_2}(h)-\overline{B_2}(0)}{h} & = \quad \frac{B_2(h)-B_2(0)}{h} = \frac{\frac{h^2}{2}-\frac{h}{2}}{h} = \frac{h-1}{2} \\ \frac{\overline{B_2}(-h)-\overline{B_2}(0)}{-h} & = \quad \frac{B_2(1-h)-B_2(1)}{-h} = \frac{\frac{(1-h)^2}{2}-\frac{1-h}{2}}{-h} = \frac{1-h}{2}, \end{cases},$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\overline{B_2}(h) - \overline{B_2}(0)}{h} = -\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\overline{B_2}(h) - \overline{B_2}(0)}{h}$.

II.A.3) Pour tout $x \in]0;1[$, on a $\overline{B_1}(x) = B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et
$\overline{B_1}(0) = \dfrac{B_1(0) + B_1(1)}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \overline{B_1}(x) = -\dfrac{1}{2} \neq \overline{B_1}(0)$, ce qui montre que $\boxed{\overline{B_1} \text{ n'est pas continue}}$.

II.B **- II.B.1)** La fonction $\overline{P}$ coïncide avec le polynôme P sur $]0,1[$, elle est donc de classe C^1 sur $]0,1[$, et cette restriction admet un prolongement polynomial, qui est donc de classe C^1 sur $[0,1]$. Par 1-périodicité, on en déduit que

$\boxed{\overline{P} \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}}$.
En outre, $\lim\limits_{x\to 0^+} \overline{P}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} P(x) = P(0)$, et (par périodicité de $\overline{P}$)
$\lim\limits_{x\to 0^-} \overline{P}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \overline{P}(1+x) = \lim\limits_{y\to 1^-} P(y) = P(1)$.
Donc $\overline{P}$ est continue en 0 si et seulement si $P(0) = P(1)$ (cette condition est clairement nécessaire et elle suffisante, puisqu'elle entraîne $\overline{P}(0) = \frac{P(0)+P(0)}{2} = P(0) = \lim_{0^+} \overline{P} = P(1) = \lim_{0^-} \overline{P}$).
Vu que $\overline{P}$ est déjà continue sur $]0,1[$ et 1-périodique, on en déduit que $\boxed{\overline{P} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } P(0) = P(1)}$.

II.B.2) La fonction $\overline{P}$ est 1-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier
$\alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, vers le réel $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^+} \overline{P} + \lim\limits_{x^-} \overline{P}\right)$, où les coefficients de Fourier de $\overline{P}$ sont donnés par

$$\boxed{\alpha_0 = \int_0^1 \overline{P}(t)dt = \int_0^1 P(t)dt},$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \alpha_k = 2\displaystyle\int_0^1 \overline{P}(t)\cos(2k\pi t)dt = 2\int_0^1 P(t)\cos(2k\pi t)dt \\ \beta_k = 2\displaystyle\int_0^1 \overline{P}(t)\sin(2k\pi t)dt = 2\int_0^1 P(t)\sin(2k\pi t)dt \end{cases}}.$$

En outre, $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^+} \overline{P} + \lim\limits_{x^-} \overline{P}\right) = \overline{P}(x)$ si $x \in]0;1[$ (puisque $\overline{P}$ est continue sur $]0;1[$), et $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{0^+} \overline{P} + \lim\limits_{0^-} \overline{P}\right) = \dfrac{P(0)+P(1)}{2} = \overline{P}(0)$, donc l'application du théorème de Dirichlet donne la relation

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad \overline{P}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x))}.$$

Par 1-périodicité de $\overline{P}$ et du développement en série de Fourier, on en déduit que $\boxed{\text{la relation précédente reste vraie pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

***II.C* -** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **I.B.2)** et **I.C.3)**, le polynôme B_{2n} vérifie les relations :

$$B_{2n}(0) = B_{2n}(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x).$$

La première relation entraîne (d'après **II.B.1)**) que la fonction 1-périodique $\overline{B_{2n}}$ est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$. De plus, en vertu de la seconde relation, on a

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \overline{B_{2n}}(-x) = \overline{B_{2n}}(1-x) = B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x) = \overline{B_{2n}}(x).$$

En utilisant encore la périodicité de $\overline{B_{2n}}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \overline{B_{2n}}(-x) = \overline{B_{2n}}(x),$$

et donc que $\boxed{\overline{B_{2n}} \text{ est paire}}$.

***II.D* - II.D.1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{I_0(n) = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x)dx = 0}$ car $B_{2n} \in H$ (puisque $2n \geq 1$).

II.D.2) Pour tout $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}
I_k(n+1) &= \int_0^1 B_{2n+2}(x)\cos(2k\pi x)dx\\
&= \underbrace{\left[B_{2n+2}(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 B_{2n+1}(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}dx\\
&= \left[B_{2n+1}(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2n}(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}dx\\
&= \frac{B_{2n+1}(1)-B_{2n+1}(0)}{(2k\pi)^2} - \frac{I_k(n)}{(2k\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Vu que $B_{2n+1}(1)=B_{2n+1}(0)=0$ (d'après **I.C.4)**), on en déduit la relation

$$\boxed{I_k(n+1) = -\frac{I_k(n)}{(2k\pi)^2}}.$$

II.D.3) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a, d'après le début du calcul fait à la question précédente (qui reste valable pour $n=0$) :

$$I_k(1)=\int_0^1 B_2(x)\cos(2k\pi x)dx = \frac{B_1(1)-B_1(0)}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^2}\underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi x)dx}_{=0}$$

(puisque $B_0=1$). Mais $B_1(1)-B_1(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, donc $\boxed{I_k(1)=\frac{1}{(2k\pi)^2}}$.

II.D.4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $\overline{B_{2n}}$ étant 1-périodique et paire, ses coefficients de Fourier $(\beta_k)_{k\geq 1}$ sont nuls. D'après **II.B.2)**, on a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \overline{B_{2n}}(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\cos(2k\pi x).$$

Or, $\alpha_0=\int_0^1 B_{2n}(x)dx = I_0(n)=0$, et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_k=2I_k(n)$.
La relation établie en **II.D.2)** implique alors (par une récurrence sur n) :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad I_k(n)=-\frac{I_k(n-1)}{(2k\pi)^2}=\cdots=\frac{(-1)^{n-1}I_k(1)}{((2k\pi)^2)^{n-1}},$$

c'est-à-dire $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ I_k(n)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}}$. En reportant ces valeurs dans le développement en série de Fourier de $\overline{B_{2n}}$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \overline{B_{2n}}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x).$$

En restreignant à l'intervalle $[0;1]$, on en déduit

$$\boxed{\forall x\in[0;1],\qquad B_{2n}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x).}.$$

II.D.5) Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n \geq 2 > 1$, donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{(2n)}} \text{ est convergente}}$ (critère de Riemann), ce qui prouve l'existence de S_{2n}.
En outre, en évaluant la relation obtenue en **II.D.4)** en $x = 0$, on obtient

$$b_{2n} = 2(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{(2\pi)^{2n}},$$

c'est-à-dire $\boxed{S_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(2\pi)^{2n} b_{2n}}$.

II.D.6) La relation précédente utilisée avec $n = 1$ donne $S_2 = \frac{4\pi^2}{2} b_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{12}$, c'est-à-dire $\boxed{S_2 = \frac{\pi^2}{6}}$.

III La formule d'Euler Mac-Laurin

III.A **-** Soit $n \geq 2$. En intégrant par parties deux fois, on a

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^1 B_{2n}(x) f^{(2n)}(x)dx = \Big[B_{2n}(x) f^{(2n-1)}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 B'_{2n}(x) f^{(2n-1)}(x)dx \\
&= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) - \int_0^1 B_{2n-1}(x) f^{(2n-1)}(x)dx \\
&= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) \\
&\quad - \big[B_{2n-1}(x) f^{(2n-2)}(x)\big]_0^1 + \int_0^1 B_{2n-2}(x) f^{(2n-2)}(x)dx \\
&= B_{2n}(1) f^{(2n-1)}(1) - B_{2n}(0) f^{(2n-1)}(0) \\
&\quad - B_{2n-1}(1) f^{(2n-2)}(1) + B_{2n-1}(0) f^{(2n-2)}(0) + \int_0^1 B_{2n-2}(x) f^{(2n-2)}(x)dx.
\end{aligned}$$

Or, $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = b_{2n}$ et $B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = 0$ (puisque $2n - 1 \geq 3$), donc on peut réécrire $\boxed{J_n = b_{2n}\Big(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\Big) + J_{n-1}}$.

III.B **-** On refait le même calcul avec $n = 1$:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^1 B_2(x) f^{(2)}(x)dx \\
&= B_2(1) f'(1) - B_2(0) f'(0) - B_1(1) f(1) + B_1(0) f(0) + \int_0^1 \underbrace{B_0(x)}_{=1} f(x)dx.
\end{aligned}$$

Vu que $B_2(1) = B_2(0) = b_2$ et que $B_1(1) = \frac{1}{2}$ et $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$J_1 = b_2(f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \int_0^1 f(x)dx,$$

c'est-à-dire $\boxed{\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - b_2(f'(1) - f'(0)) + J_1}$.

III.C **-** Une récurrence triviale à partir de la relation obtenue en **III.A** donne

$$\begin{aligned}
J_n &= b_{2n}\big(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\big) + J_{n-1} \\
&= b_{2n}\big(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\big) + b_{2n-2}\big(f^{(2n-3)}(1) - f^{(2n-3)}(0)\big) + J_{n-2} \\
&\dots \\
&= b_{2n}\big(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\big) + \cdots + b_4\big(f^{(3)}(1) - f^{(3)}(0)\big) + J_1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $J_n = \sum_{k=2}^{n} b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_1$ (avec la convention de somme nulle si $n = 1$). Or, d'après **III.B**, $J_1 = b_2(f'(1)-f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) + \int_0^1 f(x)dx$, donc

$$J_n = \sum_{k=2}^{n} b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + b_2(f'(1)-f'(0)) - \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) + \int_0^1 f(x)dx,$$

ce qui se réécrit $\boxed{\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \sum_{k=1}^{n} b_{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n}$.

III.D - Par composition, la fonction $f : x \mapsto g((1-x)a + bx)$ est de classe C^{2n} sur $[0,1]$ (puisque $\forall x \in [0,1]$, $(1-x)a + bx \in [a;b]$ et $g \in C^{2n}([a;b], \mathbb{C})$).
De plus :

$$\forall k \in [\![1; 2n]\!], \quad f^{(k)}(x) = (b-a)^k g^{(k)}((1-x)a + bx).$$

Donc, l'application de la formule de la question **III.C** à la fonction f donne :

$$\int_0^1 g((1-t)a+bt)dt = \frac{g(b)+g(a)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}(b-a)^{2k-1} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + J_n,$$

avec $J_n = \int_0^1 B_{2n}(t)(b-a)^{2n} g^{(2n)}((1-t)a + bt)dt$.
Or, $\int_0^1 g((1-t)a + bt)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$ (en posant $x = (1-t)a + tb$), donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx = \frac{g(b)+g(a)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}(b-a)^{2k-1} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + J_n.$$

En multipliant cette égalité par $b - a$, on obtient bien

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx = (b-a)\frac{g(b)+g(a)}{2} - \sum_{k=1}^{n} (b-a)^{2k} b_{2k} \left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + R_n},$$

avec $\boxed{R_n = (b-a)J_n = \int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(t) g^{(2n)}((1-t)a + bt)dt}$.

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

IV.A -

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$. L'intégrale $\Gamma(x)$ est donc impropre en 0 et $+\infty$.
- En outre, on a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, donc (par le critère des équivalents pour les intégrales impropres de fonctions positives) l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$, donc elle converge si et seulement si $1 - x < 1$, i.e. $\boxed{x > 0}$.

- De plus, $\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ (évident si $x+1 \leq 0$, par croissance comparée si $x+1>0$). D'où, pour t suffisamment grand, on a $t^{x+1}e^{-t} \leq 1$, et donc $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$. On en déduit par comparaison de fonctions positives que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

  Donc $\boxed{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \text{ converge pour tout réel } x}$.

- L'intégrale impropre $\Gamma(x)$ converge ssi les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ convergent, ce qui équivaut à $x>0$.

  $\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \Gamma \text{ est donc }]0,+\infty[}$.

***IV.B* - IV.B.1)** Soit $x>0$ et $0<\varepsilon<T$. En intégrant par parties, on a

$$\int_\varepsilon^T t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=\varepsilon}^{t=T} + \int_\varepsilon^T x t^{x-1}e^{-t}dt = -T^x e^{-T} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}dt.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$\int_0^T t^x e^{-t}dt = -T^x e^{-T} + x\int_0^T t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Enfin, en faisant tendre $T\to+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

c'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$.

IV.B.2) On en déduit par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!}$:

- C'est clair pour $n=0$ car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $\Gamma(n+1)=n!$, alors d'après la question précédente :

  $$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!,$$

  ce qui montre que la propriété est héréditaire.

***IV.C* -** On applique le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre pour montrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

- La fonction de deux variables f définie par $f(x;t) = t^{x-1}e^{-t}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $]0,+\infty[^2$, donnée par :

  $$\forall (x;t)\in]0,+\infty[^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x;t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}.$$

- Pour tout $t>0$, la fonction d'une variable $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x;t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x;t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (voir **IV.A**).
- Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x;t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, car :
  * au voisinage de $+\infty$, on a $|(\ln t)t^{x-1}e^{-t}| \leq t^x e^{-t}$ et $t\mapsto t^x e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (car dominée par $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

* au voisinage de 0, on a $|(\ln t)t^{x-1}e^{-t}| \underset{t\to 0^+}{\sim} |\ln(t)|t^{x-1}$, et $t \mapsto |\ln(t)|t^{x-1}$ est intégrable en 0 : en effet, $t^{1-\frac{x}{2}}|\ln(t)|t^{x-1} = t^{\frac{x}{2}}|\ln(t)| \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, ce qui entraîne que $|\ln(t)|t^{x-1} \leq \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ pour t voisin de 0, et permet de conclure à l'intégrabilité en 0, puisque $1-\frac{x}{2} < 1$.

- Fixons $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a;b]$ et $t > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)\right| = |\ln t|t^{x-1}e^{-t} \leq \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases},$$

et la fonction $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (et indépendante de x) : en effet, elle est continue sur $]0,+\infty[$ et son intégrabilité en 0 et en $+\infty$ a déjà été prouvée au point précédent.

On déduit de cela que $\Gamma \in C^1([a;b],\mathbb{R})$ pour tout $b > a > 0$, donc que $\boxed{\Gamma \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})}$, et que

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x;t)dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt.}$$

***IV.D* - IV.D.1)** Pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$, car c'est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle ($t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$) sur un intervalle non réduit à un point. On a donc (d'après ce qui est admis) $\Gamma \in C^\infty(]0,+\infty[,]0,+\infty[)$.
Par composition avec la fonction $\ln \in C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, on en déduit que $g = \ln\circ\Gamma \in C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, ce qui implique évidemment que $\boxed{g \in C^{2n}(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

IV.D.2) Pour tout $x > 0$, on a (en utilisant **IV.B.1)**)

$$g(x+1) - g(x) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln(x\Gamma(x)) - \ln(\Gamma(x),$$

c'est-à-dire $\boxed{g(x+1) - g(x) = \ln(x)}$.

IV.D.3) Notons G une primitive de g (elle existe car g est continue sur $]0,+\infty[$). On a, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{x+1} g(t)dt = G(x+1) - G(x),$$

donc en dérivant (G est de classe C^1), on obtient

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x+1} g(t)dt\right) = g(x+1) - g(x) = \ln(x) = \frac{d}{dx}\left(x\ln(x) - x\right).$$

Les deux fonctions $x \mapsto \int_x^{x+1} g(t)dt$ et $x \mapsto x\ln(x) - x$ ont la même dérivée sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc elles diffèrent d'une constante.

Finalement $\boxed{\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \int_x^{x+1} g(t)dt = x\ln(x) - x + K}$.

IV.D.4) Fixons $x > 0$ et appliquons la formule d'Euler Mac-Laurin à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ (obtenue en **III.D**) à la fonction g (qui est bien de classe C^{2p}) sur l'intervalle $[x, x+1]$. On obtient

$$\int_x^{x+1} g(t)dt = \frac{g(x+1)+g(x)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x)\right) + R_p(x),$$

avec $R_p(x) = \int_0^1 B_{2p}(t) g^{(2p)}((1-t)x + t(x+1))dt = \int_0^1 B_{2p}(t) g^{(2p)}(x+t)dt$.
En utilisant la question **IV.D.3)**, on obtient la formule

$$x\ln(x) - x + K = \frac{g(x+1)+g(x)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x)\right) + R_p(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{g(x+1)+g(x)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x)\right) - R_p(x).$$

Enfin, on obtient par dérivation composée la formule :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}(g(x+1) - g(x)),$$

donc, par la question **IV.D.2)** :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}(\ln(x)) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{-1}).$$

On obtient par une récurrence aisée :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-m+1)x^{-m},$$

ou encore

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0, \quad g^{(m)}(x+1) - g^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{x^m}.$$

Ceci implique : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) = \dfrac{(2k-2)!}{x^{2k-1}}$, et donc

$$\boxed{\frac{g(x+1)+g(x)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} - R_p(x)},$$

avec $\boxed{R_p(x) = \int_0^1 B_{2p}(t) g^{2p}(t+x)dt}$, ce qui est la formule voulue.