DM20 : à rendre lundi 16/03/20

Vous traiterez le sujet Centrale TSI 2014 (math 1).

La question I.D est une question de programmation, que vous pouvez sauter.
La partie IV comporte une question qui n'est plus au programme de la filière TSI depuis 2015 : la question IV.C. On admettra le résultat de cette question, à savoir :

Théorème 1.
La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(t^{x-1} e^{-t} \right) dt.$$

Mathématiques 1

TSI

2014

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

I Polynômes et nombres de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X];\ \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Dans tout le problème, on confond les polynômes et les fonctions polynômes.

On note D l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in H$ associe son polynôme dérivé P'

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'$$

On identifiera polynôme constant et nombre réel.

I.A –

I.A.1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x \right) + \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x$, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

I.A.2) En déduire que D est surjectif.

I.A.3) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$, l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme B tel que $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

I.A.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\ \mathrm{d}t$$

On pourra considérer une primitive de P.

a) Montrer que $Q \in H$.

b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

I.B – On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \varphi(B_n)$$

Le polynôme nB_n est le n-ième *polynôme de Bernoulli*.

I.B.1) Calculer B_1 et B_2.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.

I.C.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

I.C.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

I.D – Écrire une procédure `Bern` qui prend en argument un nombre entier n et un nombre réel x et qui affiche la valeur de l'expression $B_n(x)$. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel usuellement utilisé.

II Développement de Fourier

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$. Le nombre nb_n est le n-ième *nombre de Bernoulli.*
Pour tout polynôme P, on désigne par $\overline{P}$ la fonction périodique de période 1 définie par

$$\forall x \in]0,1[, \quad \overline{P}(x) = P(x) \quad \text{et} \quad \overline{P}(0) = \frac{P(0)+P(1)}{2}$$

II.A –

II.A.1) Tracer le graphe de $\overline{B_2}$ sur l'intervalle $[-1,2]$.

II.A.2) La fonction $\overline{B_2}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

II.A.3) La fonction $\overline{B_1}$ est-elle continue ?

II.B – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Prouver que la fonction $\overline{P}$ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II.B.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{P}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x))$$

où les nombres α_0, α_1,... et β_1, β_2,... sont les coefficients de Fourier de $x \mapsto \overline{P}(x)$, dont on donnera les expressions sous forme d'intégrales.

II.C – À l'aide de la partie I, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \overline{B_{2n}}(x)$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

II.D – Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k(n) = \int_0^1 B_{2n}(x) \cos(2k\pi x) \, \mathrm{d}x$$

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_0(n)$.

II.D.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre $I_k(n+1)$ et $I_k(n)$.

II.D.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k(1)$.

II.D.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n}} \cos(2k\pi x)$$

II.D.5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$. Justifier l'existence de ce nombre et montrer que

$$S_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (2\pi)^{2n} b_{2n}$$

II.D.6) Déterminer la valeur de $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

III La formule d'Euler - Mac Laurin

Le nombre n est un entier naturel non nul et f une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour tout entier k compris entre 1 et $2n$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction f.

III.A – On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x) f^{(2n)}(x) \, \mathrm{d}x$.

Pour $n \geqslant 2$, démontrer la relation

$$J_n = b_{2n} \left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0) \right) + J_{n-1}$$

III.B – Montrer que

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2 \left(f'(1) - f'(0) \right) + J_1$$

III.C – En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n$$

III.D – Soit g une fonction de classe C^{2n} sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.
En considérant la fonction $x \mapsto g\left((1-x)a+bx\right)$ définie sur $[0,1]$, montrer que l'on obtient la formule d'Euler - Mac Laurin :

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(g(b)+g(a)) - \sum_{k=1}^{n}(b-a)^{2k} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + R_n$$

où $R_n = \displaystyle\int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(x) g^{(2n)}((1-x)a+bx)\ \mathrm{d}x$.

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

IV.A – Justifier que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

IV.B.2) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.C – Montrer que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
On admet qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D – Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln\left(\Gamma(x)\right)$$

IV.D.1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g est de classe C^{2n} sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D.2) Pour tout réel $x>0$, calculer $g(x+1)-g(x)$.

IV.D.3) Démontrer qu'il existe une constante K tel que

$$\forall\, x>0, \quad \int_x^{x+1} g(t)\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + K$$

IV.D.4) Soit p un entier strictement positif.
Montrer que, pour tout $x>0$, on a

$$\frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right) + \ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p}\frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} b_{2k} - R_p(x)$$

où $R_p(x) = \displaystyle\int_0^1 B_{2p}(t) g^{(2p)}(t+x)\ \mathrm{d}t$.

La relation précédente permet d'établir la formule de Stirling pour la fonction Γ

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

après avoir prouvé que

$$\lim_{x\to+\infty} R_p(x) = 0$$

• • • FIN • • •