Corrigé du DM19

Corrigé de l'exercice 1 (Tirages jusqu'à obtenir le plus grand numéro). *1. (a) L'événement* $(X_3 = 4)$ *est réalisé si et seulement si les trois premiers tirages ont donné des résultats strictement décroissants, à savoir* $3, 2$ *puis* 1*. On a donc la décomposition :*

$$(X_3 = 4) = ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)).$$

(b) On en déduit par indépendance mutuelle des tirages :

$$P(X_3 = 4) = P((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)) = P(N_1 = 3) \times P(N_2 = 2) \times P(N_3 = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

(c) L'événement $(X_3 = 2)$ *est réalisé si et seulement si* $(N_2 \geq N_1)$*, donc on a la décomposition :*

$$\begin{aligned}(X_3 = 2) \quad &= \quad ((N_1 = 1) \cap (N_2 = 1)) \cup ((N_1 = 1) \cap (N_2 = 2)) \cup ((N_1 = 1) \cap (N_2 = 3)) \\ &\cup ((N_1 = 2) \cap (N_2 = 2)) \cup ((N_1 = 2) \cap (N_2 = 3)) \cup ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)).\end{aligned}$$

Cette réunion est disjointe, donc

$$P(X_3 = 2) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} P((N_1 = i) \cap (N_2 = j)).$$

Par indépendance mutuelle des tirages, on obtient que

$$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, 3\}^2, \quad P((N_1 = i) \cap (N_2 = j)) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

d'où

$$P(X_3 = 2) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

(d) Puisque $X_3(\Omega) = \{2; 3; 4\}$*, les événements* $(X_3 = 2)$*,* $(X_3 = 3)$ *et* $(X_3 = 4)$ *forment un système complet d'événements. On a donc*

$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 4) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

2. Par définition de l'espérance :

$$E(X_3) = \sum_{k=2}^{4} k * P(X_3 = k) = 2 * \frac{2}{3} + 3 * \frac{8}{27} + 4 * \frac{1}{27} = \frac{64}{27}.$$

3. (a) Il y a équiprobabilité lors de chaque tirage, donc pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$*, la variable aléatoire* N_k *suit la loi uniforme sur l'ensemble* $\{1, \cdots, n\}$ *:*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \mathbb{P}(N_k = i) = \frac{1}{n}.$$

(b) L'espérance d'une loi uniforme est simplement la moyenne des valeurs prises. Ici, on a donc

$$E(N_k) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(N_k = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

(c) On a $E(N_k^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \mathbb{P}(N_k = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$*, donc*

$$V(N_k) = E(N_k^2) - E(N_k)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

4. *L'événement* $(X_n = n+1)$ *est réalisé si, et seulement si, on obtient une suite strictement décroissante de valeurs lors des* n *premiers tirages, qui est nécessairement* $(n; n-1; \cdots; 2; 1)$. *On a donc* $(X_n = n+1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n-1) \cap \cdots \cap (N_{n-1} = 2) \cap (N_n = 1)$, *ce qui entraîne par indépendance mutuelle des tirages :*

$$\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}(N_1 = n) \times \mathbb{P}(N_2 = n-1) \times \cdots \times \mathbb{P}(N_{n-1} = 2) \times \mathbb{P}(N_n = 1) = \frac{1}{n^n}.$$

5. (a) *Si* $N_1 = i$, *alors* $(X_n = 2)$ *est réalisé si, et seulement si,* $N_2 \geq N_1$, *c'est-à-dire* $N_2 \geq i$. *On a donc*

$$\mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \mathbb{P}(N_2 \geq i) = \frac{\#[\![i; n]\!]}{n} = \frac{n-i+1}{n}.$$

(b) *D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements* $(N_1 = i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, *on obtient :*

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) \times \mathbb{P}(N_1 = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}.$$

6. *Soit* $k \in [\![2; n]\!]$.

(a) *L'événement* $(X_n > k)$ *est réalisé si, et seulement si, les* k *premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante de numéros. Formellement, cela signifie :*

$$(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \cdots > N_k).$$

(b) *Il y autant de suites* $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ *strictement décroissantes à valeurs dans* $\{1, \cdots, n\}$ *que de parties à* k *éléments de l'ensemble* $\{1, \cdots, n\}$, *c'est-à-dire* $\binom{n}{k}$ *(en effet, chaque partie* $\{a_1, \cdots, a_k\}$ *donne une seule suite strictement décroissante).*
Pour chacune de ces suites, on a, par indépendance mutuelle des tirages :

$$\mathbb{P}((N_1 = a_1) \cap \cdots \cap (N_k = a_k)) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(N_i = a_i) = \frac{1}{n^k}.$$

L'événement $(X_n > k)$ *est donc la réunion disjointe de* $\binom{n}{k}$ *événements ayant tous la même probabilité* $\frac{1}{n^k}$. *D'où* $\mathbb{P}(X_n > k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k}$.

(c) *Pour* $k \in \{0; 1\}$, *l'événement* $(X_n > k)$ *est certain (donc de probabilité* 1*) puisque* $X_n(\Omega) = \{2, \cdots, n+1\}$. *Vu que* $\binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k} = 1$ *pour* $k \in \{0; 1\}$, *la formule montrée à la question précédente reste vraie pour* $k = 0$ *et* $k = 1$.

7. (a) *Soit* $k \in [\![2; n+1]\!]$. *On a l'inclusion d'événements* $(X_n > k) \subset (X_n > k-1)$, *qui entraîne :*

$$\mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k) = \mathbb{P}((X_n > k-1) \setminus (X_n > k)) = \mathbb{P}(X_n = k).$$

(b) *D'après la question précédente :*

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \textstyle\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{n+1} k\left(\mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n > k) \\
&= 2\underbrace{\mathbb{P}(X_n > 1)}_{=1} + \textstyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_n > k) - (n+1)\underbrace{\mathbb{P}(X_n > n+1)}_{=0} \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(X_n > 0)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{P}(X_n > 1)}_{=1} + \textstyle\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k).
\end{aligned}$$

(c) D'après les questions 6.(b) et 7.(b), on obtient par la formule du binôme

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

8. *D'après 7.(a), on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)$ pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$. Donc, en utilisant 6.(b) :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n^k}\left(n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n^k}\left(\frac{n \times n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \\
&= \frac{1}{n^k} \times \frac{(k-1) \times (n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

9. *Soit $k \geq 2$. Pour tout $n \geq k-1$, on a*

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!},$$

donc $\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k} \times \frac{n^k}{k!} = \frac{k-1}{k!}$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.

10. *On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ converge, et sa somme vaut e. En outre, $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{k}{k!} = \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)!} = \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k!}$ converge aussi. Donc, par combinaison linéaire, la série $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge.*
Enfin,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1.$$

11. *La série $\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}(Z = k)$ converge absolument. En effet :*

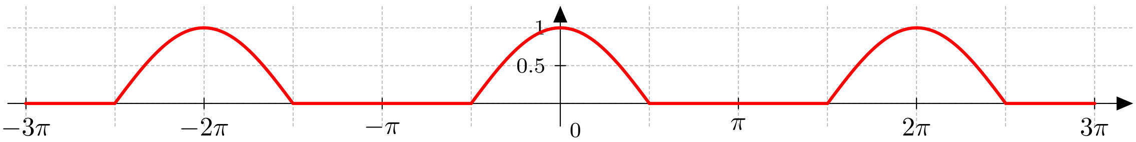
$$\forall k \geq 2, \quad |k\mathbb{P}(Z = k)| = \frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!},$$

et $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ converge.
On en déduit que Z possède une espérance finie et $E(Z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

12. *D'après 7.(c), on a $E(X_n) = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = e = E(Z)$.*

Corrigé de l'exercice 2 (Séries de Fourier).

1. *Représentation graphique de g sur $[-3\pi; 3\pi]$:*



2. *La fonction g est paire.*
En effet, si $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, on a $g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = g(x)$.
Si $x \in]-\pi; \pi[\backslash [-\pi/2; \pi/2]$, $g(-x) = 0 = g(x)$.
Si $x = \pi$, on a $g(-\pi) = g(\pi)$ par 2π-périodicité de g.
Ceci montre que la restriction de g à la période fermée $[-\pi; \pi]$ est paire.
Par périodicité, on en déduit que g est paire.

3. (a) *Puisque g est paire, on a $b_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

(b) *Par définition des coefficients de Fourier et par parité de g, on a :*

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t)dt = \frac{1}{\pi},$$

$$a_1(g) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt.$$

En linéarisant $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, on obtient :

$$a_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))dt = \frac{1}{2}.$$

Finalement, $a_0(g) = \frac{1}{\pi}$ et $a_1(g) = \frac{1}{2}$.

(c) *Soit un entier $n \geq 2$. On a, toujours par parité de g :*

$$a_n(g) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t)\cos(nt)dt.$$

En linéarisant : $\cos(t)\cos(nt) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)\right)$, on obtient

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi/2}$$

(puisque $n+1$ et $n-1$ sont non nuls), c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \qquad a_n(g) = \frac{1}{\pi(n+1)}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

(d) *Si n est un entier impair différent de 1, alors $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, donc d'après la question précédente :*

$$a_n(g) = a_{2p+1}(g) = \frac{1}{(2p+2)\pi}\sin\left((p+1)\pi\right) + \frac{1}{2p\pi}\sin\left(p\pi\right) = 0.$$

(e) *Si n est un entier pair non nul, alors $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, donc d'après la question précédente :*

$$\begin{aligned} a_n(g) = a_{2p}(g) &= \tfrac{1}{\pi(2p+1)}\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + p\pi\right) + \tfrac{1}{\pi(2p-1)}\sin\left(-\tfrac{\pi}{2} + p\pi\right) \\ &= \tfrac{(-1)^p}{\pi(2p+1)} + \tfrac{(-1)^{p+1}}{\pi(2p-1)} = \tfrac{(-1)^p}{\pi}\left(\tfrac{1}{2p+1} - \tfrac{1}{2p-1}\right) = \tfrac{-2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\forall p \geq 1, \quad a_{2p}(g) = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}.$

4. (a) *On va appliquer le théorème de Dirichlet.*
On vérifie que la fonction périodique g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux :
   - *la restriction de g à $]-\pi/2;\pi/2[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car elle coïncide avec $\cos$) ;*
   - *la restriction de g à $]-\pi,-\pi/2[\cup]\pi/2;\pi[$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car elle est nulle) ;*
   - *la fonction g et sa dérivée g' (qui vaut $-\sin(x)$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et 0 sur $]-\pi,-\pi/2[\cup]\pi/2;\pi[$) possèdent des limites finies en $-\pi^+, -(\pi/2)^-, -(\pi/2)^+, (\pi/2)^-, (\pi/2)^+$ et π^-, donc la restriction de g à la période fermée $[-\pi;\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* **(attention, pas de classe $\mathcal{C}^1$!)** *;*
   - *par périodicité, on en conclut que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

   D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier $Sg(x)$ converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a $Sg(x) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^-} g + \lim\limits_{x^+} g\right)$.
   Enfin, g est continue sur $\mathbb{R}$, car :
   - *la restriction de g à $]-\pi;\pi[\setminus\{-\pi/2;\pi/2\}$ est continue (elle coïncide avec les fonctions continues $\cos$ et 0) ;*
   - *g est continue en $\pi/2$ car :*
   $$\lim_{(\pi/2)^-} g(x) = \lim_{(\pi/2)^-} \cos(x) = 0, \qquad \lim_{(\pi/2)^+} g(x) = \lim_{(\pi/2)^+} 0 = 0,$$
   donc $\lim\limits_{(\pi/2)^-} g(x) = \lim\limits_{(\pi/2)^+} g(x) = g(\pi/2)$;
   - *par parité, g est aussi continue en $-\pi/2$;*
   - *g est continue en π car elle est nulle au voisinage de π (sur $]-\pi/2;3\pi/2[$) ;*
   - *par périodicité, on en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$.*

   La continuité de g sur $\mathbb{R}$ entraîne que $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x^-} g + \lim\limits_{x^+} g\right) = \frac{1}{2}(g(x)+g(x)) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc finalement, on a bien $Sg(x) = g(x)$.

   (b) *En utilisant la relation $Sg(x) = g(x)$ en $x = 0$, on obtient :*
   $$a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) = g(0).$$
   Puisque $a_n(g) = 0$ pour n impair différent de 1, il reste
   $$a_0(g) + a_1(g) + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}(g) = g(0),$$
   c'est-à-dire
   $$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)} = 1.$$
   Finalement, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

5. *La fonction g étant au moins continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Parseval :*
$$a_0^2(g) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(g) + b_n^2(g)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt.$$
Vu les calculs faits sur les coefficients de Fourier dans les questions précédentes, ceci se réécrit :
$$a_0^2(g) + \frac{1}{2}a_1^2(g) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g^2(t)dt,$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2(4p^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \frac{1}{4},$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$