DM19 : à rendre lundi 02/03/20

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

Exercice 1 (Tirages jusqu'à obtenir le plus grand numéro).
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule **avec remise** et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, la variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $\{2; 3; \cdots; n+1\}$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros $5, 3, 2, 2, 5, 3$, alors $X_5 = 4$.
Autre exemple, si $n = 4$ et si les tirages amènent successivement les numéros $4, 1, 2, 2, 3$, alors $X_4 = 3$.
Pour tout $k \in \{1; \cdots; n+1\}$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k^e tirage.

On souligne le fait que les $n + 1$ tirages sont mutuellement indépendants.

Partie I - Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées $1, 2, 3$.

1. (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide des événements $(N_1 = 1), (N_1 = 2), (N_1 = 3), (N_2 = 1), (N_2 = 2), (N_2 = 3), (N_3 = 1), (N_3 = 2), (N_3 = 3)$.
   (b) En déduire $P(X_3 = 4)$.
   (c) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$.
   (d) En déduire $P(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II - Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. (a) Pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k.
   (b) Calculer l'espérance de N_k pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$.
   (c) Calculer la variance de N_k pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$.
4. Calculer $P(X_n = n+1)$.
5. (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
   (b) En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
6. Soit $k \in [\![2; n]\!]$.
   (a) Justifier que les événements $(X_n > k)$ et $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$ sont égaux.
   (b) En déduire $P(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$.
7. (a) Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$. *On justifiera soigneusement !*
   (b) En déduire $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n > k)$.
   (c) Calculer ensuite $E(X_n)$.
8. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III - Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette dernière partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 2}$.

9. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
10. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, \qquad P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

11. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
12. Comparer $E(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

* * *

Exercice 2 (Séries de Fourier).
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi;\pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}.$$

1. Représenter graphiquement la fonction g sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée :

$$Sg(x) = a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(g)\cos(nx) + b_n(g)\sin(nx)\right).$$

   (a) En justifiant, donner les coefficients $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Calculer $a_0(g)$ et $a_1(g)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on a :

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

   (d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n(g) = 0$.

   (e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p}(g) = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.

   (a) A-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = Sg(x)$? Justifier précisément votre réponse.

   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.

5. En appliquant la formule de Parseval, calculer la somme $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{4p^2-1}\right)^2$.