Corrigé du DM18

Corrigé de l'exercice 1 (Un produit scalaire dans les polynômes). *1.*

- *Si $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]$, alors*

$$\psi(Q,P) = \sum_{i=0}^{3} Q(i)P(i) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i) = \psi(P,Q),$$

donc l'application ψ est symétrique.

- *Si P_1, P_2, Q sont dans $\mathbb{R}_3[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\psi(\lambda P_1+P_2,Q) = \sum_{i=0}^{3}(\lambda P_1+P_2)(i)Q(i) = \lambda\sum_{i=0}^{3} P_1(i)Q(i)+\sum_{i=0}^{3} P_2(i)Q(i) = \lambda\psi(P_1,Q)+\psi(P_2,Q),$$

donc l'application ψ est linéaire à gauche. La linéarité à droite découle de la symétrie. Donc ψ est une forme bilinéaire symétrique.

- *Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\psi(P,P) = \sum_{i=0}^{3} P(i)^2 \geq 0$.*
- *Enfin, si $\psi(P,P) = 0$, alors on a $\sum_{i=0}^{3} P(i)^2 = 0$, donc tous les $P(i)^2$ sont nuls (car les termes de cette somme sont positifs). D'où $P(i) = 0$ pour $i \in \{0;1;2;3\}$, ce qui montre que P possède quatre racines distinctes. Vu que $deg(P) \leq 3$, on en déduit que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.*

Finalement, ψ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

2. (a) Soient $i,j \in \{0;1;2\}$. Posons $P = X^i$ et $Q = X^j$. On a $PQ = X^{i+j}$, donc

$$\psi(X^i,X^j) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{3}(PQ)(k) = \sum_{k=0}^{3} k^{i+j}.$$

Il y a donc 5 cas, selon la valeur de $i+j$:

- *Si $i+j = 0$, i.e $(i,j) = (0,0)$, alors*

$$\psi(1,1) = \sum_{k=0}^{3} 1 = 4.$$

- *Si $i+j = 1$, i.e $(i,j) = (0,1)$ ou $(1,0)$, alors*

$$\psi(1,X) = \psi(X,1) = \sum_{k=0}^{3} k = 0+1+2+3 = 6.$$

- *Si $i+j = 2$, i.e $(i,j) = (0,2)$ ou $(1,1)$ ou $(2,0)$, alors*

$$\psi(1,X^2) = \psi(X,X) = \psi(X^2,1) = \sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2 = 14.$$

- *Si $i+j = 3$, i.e $(i,j) = (1,2)$ ou $(2,1)$, alors*

$$\psi(X,X^2) = \psi(X^2,X) = \sum_{k=0}^{3} k^3 = 0^3+1^3+2^3+3^3 = 36.$$

- *Si $i+j = 4$, i.e $(i,j) = (2,2)$, alors*

$$\psi(X^2,X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^4 = 0^4+1^4+2^4+3^4 = 17+81 = 98.$$

$$\textit{En résumé, } \psi(X^i, X^j) = \begin{cases} 4 & si\ i+j=0 \\ 6 & si\ i+j=1 \\ 14 & si\ i+j=2 \\ 36 & si\ i+j=3 \\ 98 & si\ i+j=4 \end{cases}.$$

(b) *Il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille* $(1, X, X^2)$ *:*

$$\tilde{P}_0 = 1, \qquad \|\tilde{P}_0\|^2 = \psi(1,1) = 4,$$

$$Q_0 = \frac{\tilde{P}_0}{\|\tilde{P}_0\|} = \frac{1}{2}.$$

$$\tilde{P}_1 = X - \psi(X, Q_0)Q_0 = X - \frac{1}{4}\psi(X,1)1 = X - \frac{3}{2},$$

$$\|\tilde{P}_1\|^2 = \|X - \frac{3}{2}\|^2 = \psi(X,X) - 2\psi(X, \frac{3}{2}) + \psi(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \psi(X,X) - 3\psi(X,1) + \frac{9}{4}\psi(1,1) = 5,$$

$$Q_1 = \frac{\tilde{P}_1}{\|\tilde{P}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 &= X^2 - \psi(X^2, Q_0)Q_0 - \psi(X^2, Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{4}\psi(X^2,1)1 - \frac{1}{5}\psi(X^2, X - \frac{3}{2}) \times (X - \frac{3}{2}) \\ &= X^2 - \frac{14}{4} - \frac{1}{5}(36 - \frac{3}{2} \times 14) \times (X - \frac{3}{2}) = X^2 - 3X + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}_2\|^2 &= \|X^2 - 3X + 1\|^2 \\ &= \psi(X^2, X^2) + \psi(-3X, -3X) + \psi(1,1) + 2\left(\psi(X^2, -3X) + \psi(X^2, 1) + \psi(-3X, 1)\right), \\ &= 98 + 9 \times 14 + 4 + 2 \times (-3 \times 36 + 14 - 3 \times 6) = 4 \end{aligned}$$

$$Q_2 = \frac{\tilde{P}_2}{\|\tilde{P}_2\|} = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1).$$

$$\textit{Ainsi, la famille } \begin{cases} Q_0 = \frac{1}{2} \\ Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right) \\ Q_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1) \end{cases} \textit{ convient.}$$

3. (a) *On donne deux méthodes :*

- *Méthode constructive* *: on cherche* $R = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ *tel que*

$$\begin{cases} R(0) = x_0 = 1 \\ R(1) = x_1 = 3 \\ R(2) = x_2 = 2 \\ R(3) = x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_3 + a_2 + a_1 = 2 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 1 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne une unique solution :

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \left(1, \frac{31}{6}, -4, \frac{5}{6}\right).$$

Il existe donc un unique polynôme qui satisfait les conditions voulues :

$$R = \frac{5}{6}X^3 - 4X^2 + \frac{31}{6}X + 1.$$

- *Méthode abstraite* *(qui est légitime puisqu'ici, on ne demande pas d'expliciter le polynôme R !) :*
on considère l'application $\begin{cases} f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \quad P \longmapsto (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$.
C'est une application linéaire (facile à vérifier), et elle est injective, car si $P \in Ker(f)$*, alors* $(P(0), P(1), P(2), P(3)) = (0,0,0,0)$*, donc P possède 4 racines distinctes, ce qui*

entraîne $P = 0$, vu que $\deg(P) < 4$. Puisque $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, on en déduit que f est un isomorphisme. Le quadruplet $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3) \in \mathbb{R}^4$ possède donc un unique antécédent par f :

$$\exists! R \in \mathbb{R}_3[X], \qquad f(R) = (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

c'est-à-dire $\exists! R \in \mathbb{R}_3[X],\ \forall i \in \{0, 1, 2, 3\},\ R(i) = x_i$.

(b) *Notons $\pi(R)$ le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F. Vu que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthonormée de F, on a l'expression :*

$$\pi(R) = \psi(R, Q_0)Q_0 + \psi(R, Q_1)Q_1 + \psi(R, Q_2)Q_2.$$

Remarque *: Pour poursuivre le calcul, il n'est pas utile de connaître explicitement R ; en effet, seules les valeurs $R(i)$ (pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) sont utiles.*

$$\psi(R, Q_0) = \sum_{i=0}^{3} R(i)Q_0(i) = \frac{1}{2}(1 + 3 + 2 + 3) = \frac{9}{2},$$

$$\psi(R, Q_1) = \sum_{i=0}^{3} R(i)Q_1(i) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 \times \frac{-3}{2} + 3 \times \frac{-1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\psi(R, Q_2) = \sum_{i=0}^{3} R(i)Q_2(i) = \frac{1}{2}\left(1 \times 1 + 3 \times (-1) + 2 \times (-1) + 3 \times 1\right) = -\frac{1}{2}.$$

D'où

$$\pi(R) = \frac{9}{2}Q_0 + \frac{\sqrt{5}}{2}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{4}(-X^2 + 5X + 5).$$

(c) *Pour tout $Q \in F$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}(x_i - Q(i))^2 = \sum_{i=0}^{3}(R(i) - Q(i))^2 = \psi(R-Q, R-Q) = \|R-Q\|^2$.*
L'ensemble Σ est donc constitué des carrés des distances de R aux polynômes Q du sous-espace F.
Le minimum de ces distances est atteint, il s'agit de la distance de R à son projeté orthogonal $\pi(R)$. On a donc :

$$\inf \Sigma = \min \Sigma = \|R - \pi(R)\|^2.$$

On peut faciliter le calcul de ce minimum en utilisant le théorème de Pythagore : en effet, les vecteurs $\pi(R) \in F$ et $R - \pi(R) \in F^\perp$ sont orthogonaux, donc

$$\|R\|^2 = \|\pi(R) + R - \pi(R)\|^2 = \|\pi(R)\|^2 + \|R - \pi(R)\|^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \min \Sigma &= \|R - \pi(R)\|^2 = \|R\|^2 - \|\pi(R)\|^2 = \psi(R, R) - \psi(\pi(R), \pi(R)) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{3} R(i)^2 - \sum_{i=0}^{3}[\pi(R)](i)^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 - \tfrac{1}{16}(5^2 + 9^2 + 11^2 + 11^2) = 23 - \tfrac{348}{16} = \tfrac{5}{4} \end{aligned}.$$

Finalement, le minimum cherché est $\dfrac{5}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 (Produit scalaire matriciel). *1. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ le coefficient (i, i) du produit $A^T B$ vaut :*

$$(A^T B)[i, i] = \sum_{k=1}^{n} A^T[i, k]B[k, i] = \sum_{k=1}^{n} A[k, i]B[k, i].$$

En prenant la trace de cette matrice produit, on en déduit :

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}(A^T B)[i, i] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A[k, i]B[k, i]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A[i, j]B[i, j].$$

2. *Notons B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.*
On a $\varphi(B,B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\varphi(A,B)| \leq \sqrt{\varphi(A,A)} \times \sqrt{\varphi(B,B)},$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \times \sqrt{n^2} = n\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}.$$

3. *Soit $A \in \mathcal{A}_n$ une matrice antisymétrique et $S \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique.*
On a $A^T = -A$ et $S^T = S$, donc

$$\varphi(A,S) = Tr(A^T\,S) = Tr(-A\,S) = -Tr(AS),$$

mais aussi

$$\varphi(A,S) = \varphi(S,A) = Tr(S^T\,A) = Tr(SA) = Tr(AS),$$

ce qui montre que $\varphi(A,S) = -\varphi(A,S)$, et donc que $\varphi(A,S) = 0$.
Toute matrice de $\mathcal{A}_n$ est orthogonale à toute matrice de $\mathcal{S}_n$, donc les sous-espaces $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire φ).

4. (a) *On a manifestement $F = Vect_{\mathbb{R}}\,(M_1, M_2)$, avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
La famille (M_1, M_2), de cardinal 2, est donc une famille génératrice du sous-espace F.
De plus, on vérifie facilement que $aM_1 + bM_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \implies a = b = 0$, donc cette famille est libre. La famille (M_1, M_2) est donc une base de F, qui est donc de dimension 2.

   (b) *Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a*

$$M \in F^\perp \iff \begin{cases} \varphi(M, M_1) = 0 \\ \varphi(M, M_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

   Ceci montre que $F^\perp = Vect_{\mathbb{R}}(M_3, M_4)$, avec $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Puisque $\dim(F^\perp) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(F) = 4 - 2 = 2$, on en déduit automatiquement que la famille (M_3, M_4) est génératrice minimale de $F^\perp$, c'est donc une base de $F^\perp$.

   (c) *Notons $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la projection orthogonale de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur le sous-espace F.*
   Tout d'abord, $A' \in F$, donc $d = -a$ et $c = b$, c'est-à-dire $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.
   Ensuite $A - A' = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \in F^\perp$, donc $\begin{cases} \varphi(A - A', M_1) = 0 \\ \varphi(A - A', M_2) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ 1 - 2b = 0 \end{cases}$,
   donc $a = b = \frac{1}{2}$. On obtient finalement $A' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.