DM18 : à rendre lundi 10/02/20

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

Exercice 1 (Un produit scalaire dans les polynômes).
On définit l'application $\Psi : \mathbb{R}_3[X]^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \Psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Montrer que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ est muni de ce produit scalaire.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) Calculer $\Psi(1,1)$, $\Psi(1,X)$, $\Psi(1,X^2)$, $\Psi(X,X)$, $\Psi(X,X^2)$ et $\Psi(X^2,X^2)$.
   (b) Construire une base orthonormée $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ de F telle que :
   $$\forall k \in \{0;1;2\}, \quad Vect(Q_0, \cdots, Q_k) = Vect(1, \cdots, X^k).$$
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. On considère l'ensemble des sommes
   $$\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} (x_i - P(i))^2, \ P \in F \right\}.$$
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall i \in \{0,1,2,3\}, \quad R(i) = x_i.$$
   (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.
   (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.

Exercice 2 (Produit scalaire matriciel, Extrait de la banque PT).
Soit un entier $n \geq 2$. On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Tr(A)$ la trace de A, et A^T la matrice transposée de A.
On définit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \qquad \varphi(A,B) = Tr(A^T B).$$

On a vu que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir le cours).
Muni de φ, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc un espace euclidien (de dimension n^2).

1. Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\varphi(A,B)$ en fonction des coefficients de A et B.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
   $$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$
   (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétiques (i.e. $A^T = -A$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques (i.e. $A^T = A$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (a) Donner une base et la dimension de F.

   (b) Donner une base de $F^\perp$.

   (c) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F.