Corrigé du DM17

Corrigé de l'exercice 1 (La méthode de variation des constantes). *1. Pour tout réel t, on a*

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\frac{b(t)}{a(t)}y'(t) - \frac{c(t)}{a(t)}y(t) + \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

car y est solution de (E) et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Et ceci se réécrit :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $\boxed{Y \text{ est solution de } (S)}$.

2. *L'équation (E_0) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, et sous forme résolue (car la fonction a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).*
   Donc, $\boxed{\text{l'espace vectoriel des solutions de } (E_0) \text{ est de dimension } 2}$.
3. *On a $U, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dérivables et*

$$U'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} U(t), \qquad V'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} V(t)$$

   (puisque u et v sont solutions de l'équation (E_0) : $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$).
   La fonction $W : t \mapsto \lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \lambda'(t)U(t) + \lambda(t)U'(t) + \mu'(t)V(t) + \mu(t)V'(t) \\ &= \lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) \\ &\quad + \lambda(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} U(t) + \mu(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} V(t) \end{aligned},$$

   c'est-à-dire

$$W'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t) + \left[\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t)\right].$$

   Ceci montre que

$$\boxed{W \text{ est solution de } (S) \iff \lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}.}$$

4. *Puisque $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ et $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$, on a*

$$\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = \lambda'(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) \end{pmatrix}.$$

   Donc, si W est une solution de (S), on a $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}}$, *ce qui est le système annoncé.*
5. (a) *Pour tout nombre complexe $u \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} u^p = \frac{1 - u^{N+1}}{1 - u}$, donc la série $\displaystyle\sum_{p \geq 0} u^p$ converge si et seulement si $|u| < 1$, et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{p \geq 0} u^p = \frac{1}{1-u}$.*
   En appliquant ceci à $u = -t^2$, on en déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{p \geq 0} (-1)^p t^{2p}$ converge si et

seulement si $|-t^2| < 1$, *c'est-à-dire si et seulement si* $|t| < 1$.
Ceci montre que $\boxed{\text{le rayon de convergence est } R = 1}$.

Quant à la somme, on a $\boxed{\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p} = \sum_{p\geq 0}(-t^2)^p = \frac{1}{1+t^2}, \text{ pour } t \in]-1, 1[}$.

(b) *Puisque* $\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1} = t\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p}$ *(en cas de convergence), on en déduit (par la question précédente) que* $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1} \text{ est } R = 1}$, *et on a* $\boxed{\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1} = \frac{t}{1+}}$

6. *Les fonctions ayant une dérivée seconde nulle sont les fonctions affines :*

$$y'' = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}, y' = a \iff \exists b \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = at + b.$$

La solution générale de (E_c) *sont donc* $\boxed{\text{les fonctions de la forme } t \mapsto at + b, \text{ avec } a, b \text{ réels}}$.

7. (a) i. *La fonction* $t \mapsto (1+t^2)f(t)$ *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$\frac{d}{dt}\left[(1+t^2)f(t)\right] = 2f(t) + 4tf'(t) + (1+t^2)f''(t).$$

Mais cette quantité vaut 0 *si* f *est solution de* (E_h) *(et la réciproque est vraie). La fonction* $t \mapsto (1+t^2)f(t)$ *a une dérivée seconde nulle,* $\boxed{\text{c'est donc une fonction affine}}$.

ii. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable. D'après la question précédente, on a*

$$f \text{ solution de } (E_h) \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)f(t) = at + b,$$

c'est-à-dire

$$f \text{ solution de } (E_h) \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a\frac{t}{1+t^2} + b\frac{1}{1+t^2}.$$

Les solutions de (E_h) *sont donc les combinaisons linéaires des fonctions* $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ *et* $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$. *Ces deux fonctions étant non nulles et non proportionnelles, elles sont linéairement indépendantes, et* $\boxed{\text{forment une base des solutions de } (E_h)}$.

(b) i. *En notant* $R > 0$ *le rayon de convergence de la série cherchée, on a (après changement d'indices)*

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) + 4n + 2)a_n\right]t^n,$$

c'est-à-dire

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E_h) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} + a_n = 0}.$$

ii. *Une récurrence facile montre que* $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = (-1)^p a_0, \quad a_{2p+1} = (-1)^p a_1.}$

iii. *On a donc*

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1} = a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} + a_1\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1}$$

(ce calcul fonctionne pour tout $t \in]-1; 1[$ *car toutes les séries convergent absolument pour ces valeurs de* t*).*
On utilise alors les questions 5(a) et 5(b) pour reconnaître ces développements en série entière :

$$\boxed{y(t) = a_0\frac{1}{1+t^2} + a_1\frac{t}{1+t^2}, \quad t \in]-1; 1[}$$

8. (a) *Il suffit d'appliquer la question 4. avec* $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $v(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *et* $a(t) = 1+t^2$ *:*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{1+t^2}\lambda'(t) + \frac{t}{1+t^2}\mu'(t) & = & 0 \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\lambda'(t) + \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\mu'(t) & = & \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{array}\right.}$$

(b) *La résolution du système linéaire amène :*

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2}, \quad \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}.}$$

(c) *En primitivant, on obtient*

$$\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + a, \quad \mu(t) = \arctan(t) + b.}$$

(d) *Les solutions de* (E) *sont les fonctions* $t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$, *où* λ *et* μ *vérifient le conditions de la question 8(a). Il s'agit donc des fonctions :*

$$\boxed{y : t \mapsto \frac{a + bt - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\arctan(t)}{1+t^2}},$$

avec a, b *réels.*