DM17 : à rendre lundi 03/02/20

Exercice 1 (La méthode de variation des constantes).

Partie I : Principe de la méthode

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$a(t)y'' + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = h(t) \qquad (E),$$

où a, b, c et h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, et telles que **a ne s'annule jamais**.

1. Soit y une solution de (E). Pour tout réel t, on pose : $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que Y est solution du système différentiel linéaire :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & \frac{-b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix} \qquad (S).$$

2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) ?

Soit (u, v) une base de solutions de l'équation homogène (E_0). Pour tout réel t, on pose :

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}.$$

On recherche une solution de (S) sous la forme :

$$W(t) = \lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t),$$

où λ et μ sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à déterminer.
On pose $H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que W est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = H(t).$$

4. En déduire que, pour tout réel t :

$$\begin{cases} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) & = & 0 \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) & = & \frac{h(t)}{a(t)} \end{cases}.$$

Partie II : Application à un exemple

5. (a) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.
   (b) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p+1}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.
6. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_c) : $y'' = 0$.
7. On considère l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0 \qquad (E_h).$$

   (a) Soit f une solution de (E_h), définie sur $\mathbb{R}$.
      i. Montrer que la fonction $t \mapsto (1 + t^2)f(t)$ est une fonction affine de t.

ii. Montrer que $\left(t \mapsto \frac{1}{1+t^2}, t \mapsto \frac{t}{1+t^2}\right)$ est une base de l'espace des solutions de (E_h).

(b) *Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène* (E_h).
On recherche les solutions de (E_h) développables en série entière au voisinage de 0 sous la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle.

i. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

ii. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1.

iii. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur un voisinage de 0.

8. On considère l'équation différentielle

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad (E).$$

On cherche à résoudre (E) en appliquant la méthode de variation des constantes de la première partie, c'est-à-dire en recherchant les solutions sous la forme :

$$t \mapsto y(t) = \frac{\lambda(t)}{1+t^2} + \frac{t\mu(t)}{1+t^2},$$

où λ et μ sont deux fonctions inconnues, à déterminer.

(a) Donner la condition vérifiée pour tout réel t par $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$.

(b) En déduire $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$.

(c) Exprimer, pour tout réel t, $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

(d) En déduire enfin l'expression de la solution générale de (E).