Corrigé du DM16

Corrigé de l'exercice 1 (Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1).

1. (a) *La fonction $t \mapsto t(4-t)$ est continue et strictement positive sur $]0;4[$ (car $t>0$ et $4-t>0$), donc par composition $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(4-t)}}$ est définie et continue sur $]0;4[$.*

   (b) *On a $t(4-t) = 4t - t^2 = 4t + o(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} 4t$, donc en composant avec la puissance $-1/2$, on a*
$$\frac{1}{\sqrt{t(4-t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}},$$
   donc la constante $\alpha = 1/2$ convient.

   (c) *Fixons $x \in]0;4[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ converge (d'après le critère de Riemann en 0 avec un exposant <1). D'après le critère des équivalents pour les intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit par la question précédente que l'intégrale impropre $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}}$ converge.*

   (d) *En posant $u = \sqrt{t}$, on a $t = u^2$, donc "$dt = 2udu$", ce qui donne pour tout $x \in]0;4[$:*
$$A(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{\sqrt{u^2(4-u^2)}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{1-(u/2)^2}}.$$
   Puisque la dérivée de arcsin *est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, on en déduit par composition que*
$$\forall x \in]0;4[, \qquad A(x) = \left[2\arcsin\left(\frac{u}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{x}} = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right).$$
   Par rapport à la forme proposée, la constante $\beta = 2$ convient donc.

   (e) *Posons $\varphi(t) = \arcsin(t)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$, donc la formule de Taylor-Young en 0 s'applique. A l'ordre 3, cela donne :*
$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \frac{t^3}{3!}\varphi'''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$
   Or, en dérivant :
$$\varphi'(t) = (1-t^2)^{-1/2}, \qquad \varphi''(t) = t(1-t^2)^{-3/2}, \qquad \varphi'''(t) = (1-t^2)^{-3/2} + 3t^2(1-t^2)^{-5/2},$$
   donc
$$\varphi(t) = 0 + t*1 + \frac{t^2}{2}*0 + \frac{t^3}{6}*1 + \underset{t\to 0}{o}(t^3) = t + \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

   (f) *La question précédente montre que $\arcsin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$. En posant $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ (qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0^+$), on obtient que $\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2}$, et donc $A(x) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$.*

2. (a) *Si $x<0$, la fonction $t \mapsto t(t-4)$ est continue et strictement positive sur $[x;0[$ (car $t<0$ et $t-4<0$), donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(t-4)}}$ est continue sur $[x;0[$. L'intégrale $B(x)$ est donc impropre en 0^-. En outre, $\frac{1}{\sqrt{t(t-4)}} \underset{t\to 0^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{-t}}$, et l'intégrale impropre $\int_x^0 \frac{1}{2\sqrt{-t}}dt$ converge, puisque $\int_x^\varepsilon \frac{1}{2\sqrt{-t}}dt = -\sqrt{-\varepsilon} + \sqrt{-x} \underset{\varepsilon\to 0^-}{\longrightarrow} \sqrt{-x}$. On en déduit par le critère des équivalents que l'intégrale impropre $B(x)$ converge.*

(b) *En posant* $u = \sqrt{-t} + \sqrt{4-t}$*, on a* "$du = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{-t}+\sqrt{4-t}}{\sqrt{t(t-4)}}\right)dt$"*, ce qui donne pour tout* $x < 0$ *:*

$$B(x) = \int_{\sqrt{-x}+\sqrt{4-x}}^{2} -\frac{2du}{u} = -2\ln 2 + 2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{4-x}) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{-x}+\sqrt{4-x}}{2}\right),$$

donc $\gamma = 2$ *convient par rapport à la forme proposée.*

(c) *On peut réécrire :*

$$\sqrt{-x}+\sqrt{4-x} = \sqrt{-x} + 2\left(1-\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{-x} + 2\left(1-\frac{x}{8}+o(x)\right),$$

donc

$$\sqrt{-x}+\sqrt{4-x} = 2 + \sqrt{-x} + o(\sqrt{-x}).$$

En composant avec ln*, on obtient*

$$B(x) = 2\ln\left(1+\frac{\sqrt{-x}}{2} + o(\sqrt{-x})\right).$$

Puisque $\ln(1+u) = u + o(u)$*, on en déduit que* $B(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} 2 * \frac{\sqrt{-x}}{2} = \sqrt{-x}$.

3. (a) *Un calcul simple (en identifiant les numérateurs) montre que :*

$$\frac{x-2}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4} \iff (a,b) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

Sur $]-\infty;0[$*, on a donc :*

$$(H) \iff y' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right)y = 0.$$

On en déduit que les solutions de (H) *sur* $]-\infty;0[$ *sont les fonctions :*

$$x \mapsto \alpha_1 e^{-\frac{1}{2}(\ln|x|+\ln|x-4|)} = \alpha_1(|x| * |x-4|)^{-1/2} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{x(x-4)}}, \qquad \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

(b) *Sur l'intervalle* $]0;4[$*, on procède de même, mais puisque* $|x|*|x-4| = x(4-x)$*, les solutions de* (H) *sur* $]0;4[$ *sont les fonctions :*

$$x \mapsto \frac{\alpha_2}{\sqrt{x(4-x)}}, \qquad \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) *Idem sur l'intervalle* $]4;+\infty[$ *: on a* $|x| * |x-4| = x(x-4)$*, donc les solutions de* (H) *sur* $]4;+\infty[$ *sont les fonctions :*

$$x \mapsto \frac{\alpha_3}{\sqrt{x(x-4)}}, \qquad \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

(d) *Si* y *est une solution de* (H) *sur* $\mathbb{R}$*, alors il existe, d'après les 3 questions précédentes, trois réels* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *tels que*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\sqrt{x(x-4)}} & si\ x < 0 \\ \frac{\alpha_2}{\sqrt{x(4-x)}} & si\ 0 < x < 4 \\ \frac{\alpha_3}{\sqrt{x(x-4)}} & si\ x > 4 \end{cases}.$$

Mais y *possède un prolongement continu sur* $\mathbb{R}$ *(puisque c'est une solution sur* $\mathbb{R}$*), ce qui impose* $\alpha_1 = 0$ *(sinon* y *possède une limite infinie en* 0^-*). On montre de même que* $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ *nécessairement, donc* $y = 0$.
Réciproquement, la fonction nulle est évidemment solution de (H) *sur* $\mathbb{R}$*, donc on a montré que la fonction nulle est la seule solution de* (H) *sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

4. (a) *Méthode de variation de la constante : les solutions de* (E) *sur* $]0;4[$ *sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{\alpha(x)}{\sqrt{x(4-x)}},$$

avec $\alpha'(x) = \frac{2}{\sqrt{x(4-x)}}$, *donc* $\alpha(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{t(4-t)}}dt + \alpha = 2A(x) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E) *sur* $]0;4[$ *sont donc les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{2A(x)+\alpha}{\sqrt{x(4-x)}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) *D'après la question 1.(f),* $A(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$, *donc si* $\alpha \neq 0$, *la solution* y *aura une limite infinie en* 0^+. *En revanche, si* $\alpha = 0$, *on aura* $y(x) = \frac{2A(x)}{\sqrt{x(4-x)}} \sim \frac{2}{\sqrt{4-x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
Ceci montre que (E) *possède une unique solution sur* $]0;4[$ *qui possède une limite finie en* 0^+ *: il s'agit de*

$$f : x \mapsto \frac{2A(x)}{\sqrt{x(4-x)}},$$

et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

5. (a) *Méthode de variation de la constante : les solutions de* (E) *sur* $]-\infty;0[$ *sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{\alpha(x)}{\sqrt{x(x-4)}},$$

avec $\alpha'(x) = \frac{-2}{\sqrt{x(x-4)}}$, *donc* $\alpha(x) = \int_0^x \frac{-2}{\sqrt{t(t-4)}}dt + \alpha = 2B(x) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E) *sur* $]-\infty;0[$ *sont donc les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{2B(x)+\alpha}{\sqrt{x(x-4)}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) *D'après la question 2.(c),* $B(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} \sqrt{-x}$, *donc si* $\alpha \neq 0$, *la solution* y *aura une limite infinie en* 0^-. *En revanche, si* $\alpha = 0$, *on aura* $y(x) = \frac{2B(x)}{\sqrt{x(x-4)}} \sim \frac{2}{\sqrt{4-x}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$.
Ceci montre que (E) *possède une unique solution sur* $]-\infty;0[$ *qui possède une limite finie en* 0^- *: il s'agit de*

$$g : x \mapsto \frac{2B(x)}{\sqrt{x(x-4)}},$$

et $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$.

6. (a) *Si une telle fonction* h *existe, alors d'après 4.(b) et 5.(b), on a*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2B(x)}{\sqrt{x(x-4)}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2A(x)}{\sqrt{x(4-x)}} & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}.$$

Réciproquement, cette fonction convient car elle possède une limite finie en 0 *(en effet, les limites en* 0^- *et* 0^+ *coïncident et valent* 1*).*

(b) *Pour* $x \in]0;4[$, *on a*

$$T(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{2A(x)}{\sqrt{x(4-x)}} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{4\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{x(4-x)}} - 1\right) = \frac{4\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sqrt{x(4-x)}}{x^{3/2}\sqrt{4-x}}.$$

En utilisant le DL à l'ordre 3 d'arcsinus établi en 1.(e) avec $u = \sqrt{x}/2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
4\arcsin\left(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sqrt{x(4-x)} &= 4\left(\tfrac{\sqrt{x}}{2} + \tfrac{x^{3/2}}{48} + o(x^{3/2})\right) - \sqrt{x(4-x)} \\
&= \sqrt{x}\left(2 + \tfrac{x}{12} + o(x) - \sqrt{4-x}\right) \\
&= \sqrt{x}\left(2(1-(1-\tfrac{x}{4})^{1/2}) + \tfrac{x}{12} + o(x)\right) \\
&= \sqrt{x}\left(2\left(\tfrac{x}{8} + o(x)\right) + \tfrac{x}{12} + o(x)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}).
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que $T(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^{3/2}}{2x^{3/2}} = \frac{1}{6}$*, donc* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} T(x) = \frac{1}{6}$.

(c) *La question précédente montre que la fonction h définie en 6.(a) est dérivable en 0, avec $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1/6$. C'est donc une solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty;4[$. Enfin, c'est la seule d'après l'unicité établie en 6.(a).*

7. *Si l'équation (E) possédait une solution définie sur $\mathbb{R}$, alors par restriction à l'intervalle $]-\infty;4[$, la fonction y coïnciderait avec h sur $]-\infty;4[$. On aurait donc*

$$\forall x \in]0;4[, \qquad y(x) = \frac{4\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{x(4-x)}} \underset{x\to 4^-}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{4-x}},$$

et y posséderait une limite infinie en 4^-, ce qui est impossible puisque y est continue en 4 (étant dérivable sur tout $\mathbb{R}$). On a donc une contradiction qui montre que (E) ne possède aucune solution sur $\mathbb{R}$.