DM16 : à rendre lundi 27/01/20

Exercice 1 (Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1).
On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire :

$$(E): \; x(x-4)y' + (x-2)y = -2,$$

d'inconnue $x \mapsto y(x)$. Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle *solution de* (E) *sur* I toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2.$$

Partie I : Etude de deux primitives

1. Pour tout $x \in]0;4[$, on pose $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}}$.
   (a) Justifier que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(4-t)}}$ est bien définie et continue sur $]0;4[$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{t(4-t)}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}$.
   (c) En déduire que l'intégrale impropre $A(x)$ converge pour tout $x \in]0;4[$.
   (d) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $A(x)$.
   Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que
   $$\forall x \in]0;4[, \qquad A(x) = \beta \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\beta}\right).$$
   (e) En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que
   $$\arcsin(t) = t + \frac{t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^3).$$
   (f) Déterminer un équivalent simple de $A(x)$ lorsque $x \to 0^+$.
2. Pour tout $x \in]-\infty;0[$, on pose $B(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-4)}}$.
   (a) Montrer que $B(x)$ est bien défini pour tout $x \in]-\infty;0[$.
   (b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-t} + \sqrt{4-t}$, calculer $B(x)$.
   Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que
   $$\forall x \in]-\infty;0[, \qquad B(x) = \gamma \ln\left(\frac{\sqrt{-x} + \sqrt{4-x}}{\gamma}\right).$$
   (c) En effectuant des développements limités, montrer que $B(x) \underset{x \to 0^-}{\sim} \sqrt{-x}$.

Partie II : Résolution de (E)

3. On note $(H): \; x(x-4)y' + (x-2)y = 0$ l'équation homogène associée à (E).
   (a) Résoudre (H) sur l'intervalle $]-\infty;0[$.
   Indication : on décomposera en éléments simples : $\dfrac{x-2}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0;4[$.
   (c) Résoudre (H) sur l'intervalle $]4;+\infty[$.
   (d) Montrer que la fonction constante égale à 0 est la seule solution de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4. On étudie ici l'équation avec second membre :

$$(E): \ x(x-4)y' + (x-2)y = -2$$

sur l'intervalle $]0;4[$.

   (a) Résoudre (E) sur $]0;4[$ avec la méthode de variation de la constante.
   On exprimera les solutions à l'aide de la fonction A définie dans la question 1. (partie I).

   (b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]0;4[$ possédant une limite finie à droite en 0.
   On note f cette solution. Donner l'expression de $f(x)$, ainsi que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

5. On étudie ici l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

   (a) Résoudre (E) sur $]-\infty;0[$ avec la méthode de variation de la constante.
   On exprimera les solutions à l'aide de la fonction B définie dans la question 2. (partie I).

   (b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;0[$ possédant une limite finie à gauche en 0.
   On note g cette solution. Donner l'expression de $g(x)$, ainsi que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

6. On étudie maintenant l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty;4[$.

   (a) Montrer qu'il existe une unique fonction h définie sur $]-\infty;4[$ qui vérifie les trois conditions :

   C1 : la restriction de h à $]0;4[$ est solution de (E) sur $]0;4[$;

   C2 : la restriction de h à $]-\infty;0[$ est solution de (E) sur $]-\infty;0[$;

   C3 : h est continue en 0.

   (b) Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;4[$, on pose $T(x) = \dfrac{h(x)-h(0)}{x}$.
   Déterminer la limite ℓ de $T(x)$ lorsque $x \to 0^+$ (on effectuera des développements limités).
   On admettra que $T(x)$ tend aussi vers ℓ lorsque $x \to 0^-$.

   (c) En déduire que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;4[$.
   Préciser la valeur de cette fonction en 0, ainsi que la valeur de sa dérivée en 0.

7. L'équation (E) possède-t-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?