Corrigé du DM15

Corrigé de l'exercice 1 (Développements en série entière).

1. (a) *Pour tout* $u \in \mathbb{R}$, *on a* $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

   (b) *On en déduit par composition (en posant* $u = -x^2$*) que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

2. F *est la primitive de* $f : x \mapsto e^{-x^2}$ *nulle en* 0*, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières,* F *est développable en série entière de même rayon que* f*, donc* F *est DSE sur* $\mathbb{R}$ *et son développement s'obtient en intégrant terme à terme celui de* f *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

3. *D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières :*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

En outre

$$\forall x \in]-R, R[, \quad 2xy(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 a_{n-1} x^n,$$

donc

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y'(x) - 2xy(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1) a_{n+1} - 2 a_{n-1} \big) x^n.$$

On en déduit, avec le théorème d'unicité des coefficients d'un DSE, que y *est solution de* (E) *sur* $]-R, R[$ *si et seulement si* $\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \ (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0 \end{cases}$.

De plus, $y(0) = a_0$*, donc la condition initiale* $y(0) = 0$ *donne* $a_0 = 0$.

On obtient donc bien que toute solution DSE de (E) *telle que* $y(0) = 0$ *vérifie les relations :*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \qquad \forall n \geq 1, \ a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

4. *Montrons par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$ *la propriété :*

$$\mathcal{P}(n) : \quad \left(a_{2n} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} \right).$$

- $\mathcal{P}(0)$ *est vraie car* $a_{2*0} = a_0 = 0$ *et* $a_{2*0+1} = a_1 = 1 = \frac{2^{2*0}0!}{(2*0+1)!}$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie, alors d'après les relations établies à la question précédente :*

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{2}{2n+2} a_{2n} = \frac{2}{2n+2} * 0 = 0,$$

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \frac{2}{2n+3} a_{2n+1} = \frac{2}{2n+3} * \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} = \frac{2(2n+2)2^{2n} n!}{(2n+3)!},$$

  c'est-à-dire

$$a_{2(n+1)+1} = \frac{2^{2n+2}(n+1)n!}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+2}(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}(n+1)!}{(2(n+1)+1)!},$$

  ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*

Finalement, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le théorème de récurrence.

5. (a) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \left|\frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right|$. On a $u_n > 0$ et :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n+2}(n+1)!|x^{2n+3}|}{(2n+3)!} * \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! |x^{2n+1}|} = \frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} \left|x^2\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert que la série entière étudiée converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (mais aussi pour $x = 0$ de façon évidente) et donc que son rayon de convergence est $R = +\infty$.

(b) *D'après la question 5.(a), la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et d'après les calculs faits à la question 3., on a $S'(x) - 2xS(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque les coefficients de la série entière vérifient la bonne relation).*
Donc S est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, et on a $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} 0^{2n+1} = 0$ (le terme constant de ce DSE est nul).

6. *La fonction g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car g est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$g'(x) = 2xe^{x^2} F(x) + e^{x^2} F'(x) = 2xg(x) + e^{x^2} f(x) = 2xg(x) + 1.$$

D'autre part, $g(0) = e^0 F(0) = F(0) = 0$.

7. *Les fonctions g et S sont donc solutions du même problème de Cauchy. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit qu'elles sont égales : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = S(x)$.*

g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.