DM15 : à rendre lundi 20/01/20

Exercice 1 (Développements en série entière).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1. (a) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction $u \mapsto e^u$ ainsi que son domaine de validité.

   (b) En déduire que la fonction notée $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est développable en série entière et donner son développement en série entière (avec bien sûr son domaine de validité).

2. Montrer que F est développable en série entière sur un domaine à préciser, et calculer son développement en série entière.
   On citera précisément le théorème utilisé.

On s'intéresse maintenant à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{x^2} F(x).$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' - 2xy = 1.$$

On désire déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   En supposant que y est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ et que $y(0) = 0$, montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et que, pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

5. Réciproquement, on considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

   (a) Calculer son rayon de convergence.

   (b) En déduire que la somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est solution de (E) sur un intervalle à préciser et s'annule en 0.

6. Montrer que g est solution de (E) sur un intervalle à préciser et s'annule en 0.

7. Déduire de ce qui précède que g est développable en série entière et déterminer son développement (avec le domaine de validité).
   On citera précisément le théorème utilisé.