Corrigé du DM14

Corrigé de l'exercice 1 (Formule du binôme négatif).
Dans tout l'exercice, $x \in [0;1[$ et $c > 0$ sont fixés.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}$ est continue sur le segment $[0;x]$ (c'est le quotient de deux fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas puisque $1 \notin [0;x]$), donc l'intégrale I_n est bien définie.*
2. *La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^c} = (1-t)^{-c}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0;x]$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

On calcule alors les dérivées successives de f par récurrence simple (à rédiger !) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;x], \qquad f^{(k)}(t) = c(c+1)\cdots(c+k-1)(1-t)^{-c-k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(c+i)}{(1-t)^{c+k}}.$$

Exprimons maintenant ces dérivées en fonction des coefficients binomiaux généralisés (définis en début d'énoncé) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \binom{y}{k} = \frac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{k!},$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;x], \qquad f^{(k)}(t) = \frac{(c+k-1)(c+k-2)\cdots c}{(1-t)^{c+k}} = \frac{k!}{(1-t)^{c+k}} \binom{c+k-1}{k}.$$

En reportant cette expression dans la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \frac{(n+1)!}{(1-t)^{c+n+1}} \binom{c+n}{n+1} dt,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + (n+1)\binom{c+n}{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt.$$

Enfin, on a

$$(n+1)\binom{c+n}{n+1} = (n+1)\frac{\prod_{i=0}^{n}(c+n-i)}{(n+1)!} = \frac{c\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i)}{n!} = c\binom{c+n}{n},$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt}_{=I_n},$$

ce qui est la formule voulue.

3. (a) *La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t} = 1 + \dfrac{x-1}{1-t}$ est dérivable sur le segment $[0;x]$, et*

$$\forall t \in [0;x], \quad \varphi'(t) = \frac{x-1}{(1-t)^2} < 0,$$

(puisque $x < 1$) donc φ est décroissante sur le segment $[0;x]$. On en déduit que

$$\forall t \in [0;x], \qquad 0 = \varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) = x,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

(b) *Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après la question précédente :*

$$\forall t \in [0;x], \qquad 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n.$$

De plus, on a

$$\forall t \in [0;x], \qquad 0 \leq \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leq \frac{1}{(1-x)^{c+1}},$$

donc par produit d'inégalité entre réels positifs :

$$\forall t \in [0;x], \qquad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}.$$

La croissance de l'intégrale entraîne alors :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} dt = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \underbrace{\int_0^x dt}_{=x},$$

donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

4. (a) *Par définition des coefficients binomiaux généralisés, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \binom{c+n}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i)}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(c+i)}{\prod_{i=1}^{n} i} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{c+i}{i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{c}{i}\right),$$

ce qui est la formule voulue.

(b) *La fonction $\psi : t \mapsto t - \ln(1+t)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, et*

$$\forall t \geq 0, \qquad \psi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0,$$

donc ψ est croissante sur $[0;+\infty[$, ce qui entraîne

$$\forall t \geq 0, \qquad \psi(t) \geq \psi(0) = 0,$$

et c'est équivalent à l'inégalité cherchée.

(c) *Par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on déduit de la question précédente :*

$$\forall t \geq 0, \qquad 1+t \leq e^t.$$

En utilisant cette dernière inégalité avec $t = \frac{c}{k} \geq 0$ (pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$), on obtient par produit d'inégalité entre réels positifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{c}{k}} = \exp\left(c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \binom{c+n}{n} \leq e^{cH_n}.$$

(d) *C'est classique : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a*

$$\forall k \geq 2, \qquad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt,$$

donc pour tout entier $n \geq 2$:

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n),$$

et cette inégalité reste vraie pour $n=1$, puisque $H_1 = 1 = 1 + \ln(1)$. On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(e) *Les questions 4.(c) et 4.(d) entraînent la majoration :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \binom{c+n}{n} x^{n+1} \leq e^{c(1+\ln(n))} x^{n+1} = (e^c x) \times n^c x^n.$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^c x^n = 0$ *par croissances comparées, puisque* $x \in [0;1[$.
Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.$$

5. *Le résultat de la question 4.(e) combiné à l'encadrement de la question 3.(b) montre que*

$$\lim_{n \to +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0,$$

puisque $0 \leq c\binom{c+n}{n} I_n \leq \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \times \left(\binom{c+n}{n} x^{n+1} \right)$.
La formule établie à la question 2. entraîne alors, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, *que*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{(1-x)^c} - \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ *converge et que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$