# DM14 : à rendre lundi 13/01/20

**Exercice 1 (Formule du binôme négatif).**
On généralise la définition des coefficients binomiaux **aux nombres réels** en posant, pour tout réel $y$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$ :

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y - i)$$

(avec comme d'habitude la convention du produit vide $\displaystyle\prod_{i=0}^{-1}(\cdots) = 1$, de sorte que $\binom{y}{0} = 1$).

On considère deux réels $c > 0$ et $x \in [0; 1[$. On considère également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ est bien définie.
2. En utilisant la *formule de Taylor avec reste intégral* (voir cours TSI 1, CH.22), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n.$$

3. (a) Vérifier que $\forall t \in [0; x],\ 0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.
   (b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+t) \leq t$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\binom{c+n}{n} \leq e^{c\,H_n}$, où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (d) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \leq 1 + \ln(n)$.
   (e) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\binom{c+n}{n} x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Conclure de tout ce qui précède que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ converge et que

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k$$

*(c'est la "formule du binôme négatif").*