Corrigé du DM12

Corrigé de l'exercice 1 (Lancers successifs d'un dé bicolore).

1. *L'événement A est réalisé si et seulement si on obtient "Pile" lors du lancer de la pièce. On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$. De plus, B est l'événement contraire de A, donc*
$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$.
2. $\{A, B\}$ *est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :*

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}(B).$$

D'après la structure des dés A et B, on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_A(R_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}_B(R_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases},$$

donc

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

3. *On a $R_1 \cap R_2 = (A \cap R_1 \cap R_2) \cup (B \cap R_1 \cap R_2)$ (puisque $\{A, B\}$ est un système complet d'événements), et cette réunion est disjointe, donc*

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(A \cap R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B \cap R_1 \cap R_2).$$

Ensuite, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_{A \cap R_1}(R_2) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}_{B \cap R_1}(R_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

4. *Calculons $\mathbb{P}(R_2)$. On a la réunion disjointe $R_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)$, donc*

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{2}{9} + \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2).$$

Pour calculer $\mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2)$, on utilise la même méthode que dans la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{A \cap \overline{R_1}}(R_2) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{B \cap \overline{R_1}}(R_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Finalement $\mathbb{P}(R_2) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$.
On constate donc que $\mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dfrac{16}{81} \neq \mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$, *ce qui montre que R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.*

5. *On cherche* $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$.
Calculons le numérateur :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3).$$

Vu que les lancers successifs d'un même dé sont mutuellement indépendants, on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ \mathbb{P}_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{cases},$$

donc

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10}{81}.$$

Finalement, $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{\frac{10}{81}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{5}{9}$.

6. *On cherche :*

$$p_n = \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n)}{\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n)}{\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n) + \mathbb{P}(B \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n)}.$$

Pour calculer $\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n)$*, on procède comme dans la question précédente, en utilisant l'indépendance mutuelle des lancers d'un même dé :*

$$\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbb{P}_A(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \times \mathbb{P}(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = \frac{2^n}{3^{n+1}};$$

$$\mathbb{P}(B \cap R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbb{P}_B(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \times \mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

On en déduit :

$$p_n = \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

7. *D'après l'expression établie à la question précédente,*

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Interprétation : lorsqu'on voit un grand nombre de "rouges" consécutifs apparaître, il est fort probable que le dé utilisé soit le A.

8. *Si* $n = 8$*, alors la probabilité que le joueur ait joué avec le dé A sachant qu'il n'a obtenu que des "rouges" est* p_8*. Le parieur a donc raison si et seulement si* $p_8 \geq 0,99$*, et c'est le cas car*

$$p_8 = \frac{2^7}{2^7+1} = \frac{128}{129} > 0,99.$$

Corrigé de l'exercice 2 (Séquences particulières à *Pile* ou *Face*).

1. (a) *L'événement* A_2 *est réalisé si et seulement si la séquence* PF *apparaît lors des deux premiers lancers. On a donc* $A_2 = X_1 \cap \overline{X_2}$*, d'où, par indépendance mutuelle des événements* X_k *:*

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(X_1 \cap \overline{X_2}) = \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}(\overline{X_2}) = p(1-p).$$

(b) *L'événement* A_3 *est réalisé si et seulement si on obtient* PPF *ou* FPF *lors des trois premiers lancers. On a donc* $A_3 = (X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}) \cup (\overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3})$*. Cette réunion étant disjointe, on a :*

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}) + \mathbb{P}(\overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3}),$$

donc par indépendance mutuelle des X_k *:*

$$\mathbb{P}(A_3) = p^2(1-p) + (1-p)p(1-p) = p(1-p).$$

(c) *L'événement* A_4 *est réalisé si et seulement si on obtient* $PPPF$*,* $FPPF$*,* $FFPF$ *lors des quatre premiers lancers. On a donc*

$$A_4 = (X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \overline{X_4}) \cup (\overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3 \cap \overline{X_4}) \cup (\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap X_3 \cap \overline{X_4}).$$

En utilisant le fait que cette réunion est disjointe et l'indépendance mutuelle des X_k*, on en déduit :*

$$\mathbb{P}(A_4) = p^3(1-p) + (1-p)p^2(1-p) + (1-p)^2p(1-p) = p(1-p)(p^2-p+1).$$

(d) *Pour $n \geq 2$ fixé, l'événement A_n est réalisé si et seulement si les résultats des n premiers lancers forment une liste du type :*

$$(\underbrace{FF\cdots F}_{k\ fois}\ \underbrace{PP\cdots P}_{n-2-k\ fois}\ PF),\ \ où\ 0 \leq k \leq n-2$$

(c'est-à-dire que la sous-liste $(a_k)_{1\leq k\leq n-2}$ ne contient pas la séquence PF).
<u>Remarque</u> : les cas $k=0$ et $k=n-2$ correspondent respectivement aux cas $(\underbrace{PP\cdots PP}_{n-2\ fois}PF)$ et $(\underbrace{FF\cdots FF}_{n-2\ fois}PF)$.
Pour $k \in \{0,1,\cdots,n-2\}$ fixé, la liste $(\underbrace{FF\cdots F}_{k\ fois}\ \underbrace{PP\cdots P}_{n-2-k\ fois}\ PF)$ correspond à l'événement

$$\overline{X_1} \cap \cdots \cap \overline{X_k} \cap X_{k+1} \cap \cdots \cap X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap \overline{X_n}.$$

Donc

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \left(\overline{X_1} \cap \cdots \cap \overline{X_k} \cap X_{k+1} \cap \cdots \cap X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap \overline{X_n}\right).$$

(e) *Par additivité (puisque ces événements sont incompatibles deux à deux), on en déduit*

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}\left(\overline{X_1} \cap \cdots \cap \overline{X_k} \cap X_{k+1} \cap \cdots \cap X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap \overline{X_n}\right).$$

L'indépendance mutuelle des X_k donne alors :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(\overline{X_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{X_k}) \times \mathbb{P}(X_{k+1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{n-2}) \times \mathbb{P}(X_{n-1}) \times \mathbb{P}(\overline{X_n}),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} p^{n-(k+1)}q^{k+1} = p^n \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} = p^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{k},$$

où $q = 1-p$ est la probabilité d'obtenir "F" à un lancer.
Deux cas se présentent alors :

* *Si $p = q$, alors $p = q = \frac{1}{2}$ (puisque $q = 1-p$), donc*

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \frac{n-1}{2^n}.$$

* *Si $p \neq q$ (c'est-à-dire $p \neq 1/2$), alors*

$$\mathbb{P}(A_n) = p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} = pq \times \frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = p(1-p) \times \frac{p^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{2p-1}.$$

Finalement, on a

$$\forall n \geq 2, \qquad \mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} p(1-p) \times \dfrac{p^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{2p-1} & si\ p \neq 1/2 \\ \dfrac{n-1}{2^n} & si\ p = 1/2 \end{cases}.$$

2. (a) *On a $A = \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$.*
En effet, "la séquence PF apparaît au moins une fois" signifie qu'il existe un plus petit entier $n \geq 2$ tel que la séquence PF apparaît aux lancers $n-1$ et n, c'est-à-dire qu'un (et un seul) des événements A_n est réalisé.

(b) *Les A_n sont deux à deux incompatibles, donc*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors d'après 1.(e) :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=2}^{+\infty} pq \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q} = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-1}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{p}{1-p} - \frac{q}{1-q}\right),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(A) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{p-q}{(1-p)(1-q)}\right) = \frac{pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{qp} = 1,$$

puisque $q = 1-p$. Finalement, on a donc $\mathbb{P}(A) = 1$ si $p \neq 1/2$.

(c) *Pour tout entier $N \geq 2$ et tout réel $x \in]-1;1[$, on a*

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x},$$

donc en dérivant par rapport à x l'expression $\sum_{n=0}^{N} x^n$ d'une part, et l'expression $\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ d'autre part, on obtient

$$S_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

On fait alors tendre $N \to +\infty$: puisque $\lim_{N\to+\infty} x^{N+1} = 0$ et $\lim_{N\to+\infty}(N+1)x^N = 0$ (par croissances comparées), on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{-(N+1)x^N(1-x) + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(d) *Si $p = \frac{1}{2}$, alors par incompatibilité des A_n et d'après la question 2.(a) :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Or, en utilisant la question 2.(c) avec $x = 1/2$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1/2)^{n-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \times 4 = 1.$$

Finalement, on a aussi $\mathbb{P}(A) = 1$ si $p = 1/2$.

3. *Cette fois, on a $B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$, où B_k est l'événement : "obtenir $(\underbrace{FF\cdots F}_{k\ fois}PP)$ dans les $k+2$ premiers lancers". On a (par indépendance des lancers), $\mathbb{P}(B_k) = (1-p)^k p^2$, donc par additivité et incompatibilité des B_k :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k p^2 = \frac{p^2}{1-(1-p)} = p.$$