DM12 : à rendre lundi 16/12/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices. Le second est plus difficile.

Exercice 1 (Lancers successifs d'un dé bicolore).
On dispose de deux dés à six faces, notés A et B.
Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches.
On dispose également d'une pièce **truquée** : la probabilité d'obtenir *Pile* lors d'un lancer vaut $\frac{1}{3}$.

Pour un entier $n \geq 3$ fixé, on effectue l'expérience aléatoire suivante :
- on lance une fois la pièce de monnaie ;
- si on obtient *Pile*, alors on effectue n lancers successifs du dé A ;
- si on obtient *Face*, alors on effectue n lancers successifs du dé B.

On admet que cette expérience aléatoire est décrite par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et que les n lancers successifs d'un même dé sont mutuellement indépendants.

Dans cet espace probabilisé, on considère les événements suivants :
- A : "on joue avec le dé A";
- B : "on joue avec le dé B";
- $\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ R_k$: "on obtient une face rouge lors du k^e lancer de dé".

1. Que valent $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$?
2. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
   On pourra utiliser la formule des probabilités totales.
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
   On pourra utiliser $A \cap R_1 \cap R_2$, $B \cap R_1 \cap R_2$ et la formule des probabilités composées.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
5. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au 3^e lancer de dé sachant que l'on a obtenu "rouge" aux deux premiers lancers de dé.
6. Calculer la probabilité p_n d'avoir joué avec le dé A sachant que l'on a obtenu "rouge" à chacun des n lancers du dé.
7. Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$? Donner une interprétation.
8. Une personne réalise cette expérience avec $n = 8$.
   Un parieur arrive après coup (il n'a pas vu le dé utilisé par le joueur) et apprenant que le joueur a obtenu "rouge" huit fois de suite, il dit : "je suis sûr à 99% que le joueur a joué avec le dé A". A-t-il raison ?

Exercice 2 (Séquences particulières à *Pile* ou *Face*).
On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *Pile* est $p \in]0;1[$. Dans la suite *Pile* sera noté P et *Face* sera noté F.
Attention : dans cet exercice, l'expérience consiste en une suite infinie de lancers, donc l'univers Ω correspondant est l'ensemble des suites (infinies) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{P; F\}$ (i.e. chaque a_n vaut P ou F). Cet univers est non seulement infini, mais surtout **non dénombrable**.
On admet donc l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω pour laquelle :
- chaque événement X_k : "on obtient P au k^e lancer" soit de probabilité $p \in]0;1[$,
- les événements $(X_k)_{k\geq 1}$ sont mutuellement indépendants.

1. Pour $n \geq 2$, on note A_n l'événement : "la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n".
   (a) Exprimer A_2 en fonction des X_k et en déduire $\mathbb{P}(A_2)$.

   (b) Faire de même avec A_3.
   (c) Faire de même avec A_4.
   (d) Pour $n \geq 2$, exprimer l'événement A_n en fonction des événements X_k.
   (e) En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geq 2$.

2. On note A l'événement : "la séquence PF apparaît au moins une fois".
   (a) Exprimer l'événement A en fonction des événements A_n.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ dans le cas où $p \neq 1/2$.
   (c) Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]-1;1[$, on note $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} x^n$.

       Exprimer $S'_N(x)$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.
   (d) En déduire $\mathbb{P}(A)$ dans le cas où $p = 1/2$.
3. Soit B l'événement : "la séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.