Corrigé du DM11

Corrigé de l'exercice 1 (Equation matricielle). *1. (a) Le réel 5 est valeur propre de la matrice A si et seulement si $A-5I_3$ a un noyau non nul. Cela revient à dire que $A-5I_3$ n'est pas inversible ou encore que* $\det(A-5I_3)=0$.

Or, $\det(A-5I_3)=\begin{vmatrix} \alpha-3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = 4(1-\alpha)$, *donc 5 est valeur propre de A si et seulement si* $\boxed{\alpha=1}$.

(b) Avec $\alpha=1$, on a $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, *donc le polynôme caractéristique de A vaut :*

$$\chi_A(X)=\det(XI_3-A)=\begin{vmatrix} X-3 & -2 & -2 \\ -2 & X-5 & 0 \\ -2 & 0 & X-5 \end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} X-3 & -2 & 0 \\ -2 & X-5 & 5-X \\ -2 & 0 & X-5 \end{vmatrix}.$$

En factorisant la dernière colonne par $X-5$ (c'est rassurant, car on sait que 5 est racine de P_A d'après la question précédente), il vient :

$$\chi_A(X)=(X-5)\begin{vmatrix} X-3 & -2 & 0 \\ -2 & X-5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{=} (X-5)\begin{vmatrix} X-3 & -2 & 0 \\ -4 & X-5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on développe par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_A(X)=(X-5)\begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ -4 & X-5 \end{vmatrix} = (X-5)(X^2-8X+7)=(X-5)(X-1)(X-7).$$

Le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A, donc $\boxed{sp(A)=\{1;5;7\}}$.

(c) Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, on sait que $Tr(A)$ vaut la somme des valeurs propres de A (comptées avec multiplicité), donc on devrait avoir $Tr(A)=1+5+7=13$. C'est bien le cas car $\boxed{Tr(A)=3+5+5=13}$.

On sait également que $\det(A)$ *vaut le produit des valeurs propres de A (comptées avec multiplicité), donc on devrait avoir* $\det(A)=1\times5\times7=35$. *C'est bien le cas car :*

$$\boxed{\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-10)+5\times11=55-20=35.}$$

(d) Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. (a) Le polynôme caractéristique de $B=\begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}$ *vaut*

$$\chi_B(X)=\det(XI_3-B)=\begin{vmatrix} X-a-c & 0 & -c \\ 0 & X-a-2c & 0 \\ -c & 0 & X-a-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\chi_B(X)=(X-a-2c)\begin{vmatrix} X-a-c & -c \\ -c & X-a-c \end{vmatrix} = (X-a-2c)\left((X-a-c)^2-c^2\right),$$

c'est-à-dire (en utilisant l'identité remarquable $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$) :

$$\chi_B(X)=(X-a-2c)(X-a-c-c)(X-a-c+c)=(X-a)(X-a-2c)^2.$$

Vu que $c\neq0$, les deux racines a et $a+2c$ sont différentes, donc

$\boxed{B \text{ possède deux valeurs propres : } a \text{ (qui est simple), et } a+2c \text{ (qui est double)}}$.

(b) *Puisque χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $Tr(B) = a + (a+2c) + (a+2c) = 3a + 4c$, et c'est bien le cas car* $\boxed{Tr(B) = (a+c) + (a+2c) + (a+c) = 3a+4c}$.

(c) *La matrice B possède deux sous-espaces propres distincts :*
$E_a(B) = Ker(B - aI_3)$ *et* $E_{a+2c}(B) = Ker(B - (a+2c)I_3)$.
La valeur propre a est de multiplicité 1, donc $\dim(E_a(B)) = 1$ nécessairement.
La valeur propre $a+2c$ est de multiplicité 2, donc $\dim(E_{a+2c}(B)) \in \{1;2\}$.
Or, la matrice $B - (a+2c)I_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$ *est de rang 1 ($c \neq 0$), donc son noyau est de dimension $3 - 1 = 2$, ce qui donne $\dim(E_{a+2c}(B)) = 2$.*
Finalement, on a $\dim(E_a(B)) + \dim(E_{a+2c}(B)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

(d) *Puisque B est diagonalisable, elle est semblable à* $\boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}}$, *avec* $\boxed{\lambda = a}$ *(la valeur propre simple) et* $\boxed{\mu = a+2c}$ *(la double). Pour trouver une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = D$, il suffit de déterminer une base de chaque sous-espace propre.*

$$E_a(B) = Ker\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 2c & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0 \text{ et } y = 0\} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$E_{a+2c}(B) = Ker\begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = z\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

En posant $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, *on a donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B.*
Matriciellement : en posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ *(attention à l'ordre des vecteurs propres !), on a donc* $\boxed{P^{-1}BP = D}$.

(e) *Puisque $D = P^{-1}BP$, on a $B = PDP^{-1}$, donc*

$$BN = NB \iff PDP^{-1}N = NPDP^{-1}.$$

P étant inversible, on conserve l'équivalence en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P. Donc

$$BN = NB \iff P^{-1}(PDP^{-1}N)P = P^{-1}(NPDP^{-1})P \iff D\underbrace{(P^{-1}NP)}_{=N'} = \underbrace{(P^{-1}NP)}_{=N'}D.$$

Finalement, on a $\boxed{BN = NB \iff DN' = N'D}$, *ce qu'il fallait montrer.*

(f) *La matrice nulle $\tilde{0}$ est dans $\mathcal{S}_1$, car $B \times \tilde{0} = \tilde{0} = \tilde{0} \times B$.*
Si deux matrices N_1 et N_2 sont dans $\mathcal{S}_1$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la matrice $\lambda N_1 + N_2$ reste dans $\mathcal{S}_1$ puisque

$$B \times (\lambda N_1 + N_2) = \lambda \underbrace{BN_1}_{=N_1B} + \underbrace{BN_2}_{=N_2B} = \lambda N_1 B + N_2 B = (\lambda N_1 + N_2) \times B.$$

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ contient l'élément neutre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et il est stable par somme et multiplication externe : $\boxed{\text{c'est donc un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

(g) *Soit* $N' = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$. *Puisque* $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, *on a*

$$DN' = N'D \iff \begin{pmatrix} \lambda r & \lambda s & \lambda t \\ \mu u & \mu v & \mu w \\ \mu x & \mu y & \mu z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda r & \mu s & \mu t \\ \lambda u & \mu v & \mu w \\ \lambda x & \mu y & \mu z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda s = \mu s \\ \lambda t = \mu t \\ \mu u = \lambda u \\ \mu x = \lambda x \end{cases}$$

Puisque $\lambda \neq \mu$ $(c \neq 0)$, *cela équivaut à* $\begin{cases} s = 0 \\ t = 0 \\ u = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Finalement, les éléments de $\mathcal{S}_2$ *sont les matrices* $\boxed{N' = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & v & w \\ 0 & y & z \end{pmatrix}, \text{ avec } r, v, w, y, z \text{ réels.}}$

(h) *La question précédente montre que* $\mathcal{S}_2$ *est engendré par les matrices :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & v & w \\ 0 & y & z \end{pmatrix} = rM_1 + vM_2 + wM_3 + yM_4 + zM_5.$$

Ceci montre que la famille $(M_i)_{1 \leq i \leq 5}$ *engendre* $\mathcal{S}_2$.
Or, on reconnaît des matrices "élémentaires" : $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$, *donc il s'agit d'une famille libre (une sous-famille de la base canonique de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *en fait).*
Donc $\boxed{\text{la famille } (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2\text{, qui est donc de dimension } 5}$.

(i) *Tout d'abord, l'application* Φ *est bien définie car* $(M \in \mathcal{S}_1 \Rightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{S}_2)$ *d'après la question 2.(e). Ensuite, elle est linéaire, car* $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{S}_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\Phi(\lambda M_1 + M_2) = P^{-1}(\lambda M_1 + M_2)P = \lambda P^{-1}M_1P + P^{-1}M_2P = \lambda\Phi(M_1) + \Phi(M_2).$$

Enfin, elle est bijective car pour toute matrice $Y \in \mathcal{S}_2$ *:*

$$Y = \Phi(M) \iff Y = P^{-1}MP \iff M = PYP^{-1} \in \mathcal{S}_1$$

(d'après l'équivalence montrée en 2.(e)). On a ainsi montré que tout élément $Y \in \mathcal{S}_2$ *admet un unique antécédent* $M \in \mathcal{S}_1$ *par l'application* Φ.
Finalement, l'application Φ *est une bijection linéaire de* $\mathcal{S}_1$ *dans* $\mathcal{S}_2$, *donc* $\boxed{\text{c'est un isomorphisme}}$.
La réciproque $\Phi^{-1} : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1$ *est donnée par le calcul précédent :* $\boxed{\Phi^{-1}(Y) = PYP^{-1}}$.

(j) *Les isomorphismes conservent les bases, donc puisque* $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$ *est une base de* $\mathcal{S}_2$, *on en déduit que* $(\Phi^{-1}(E_{1,1}), \Phi^{-1}(E_{2,2}), \Phi^{-1}(E_{2,3}), \Phi^{-1}(E_{3,2}), \Phi^{-1}(E_{3,3}))$ *est une base de* $\mathcal{S}_1$ *(puisque* Φ^{-1} *est aussi un isomorphisme).*
Finalement, $\boxed{(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}) \text{ est une base de } \mathcal{S}_1}$,
et $\boxed{\dim(\mathcal{S}_1) = 5}$.

Corrigé de l'exercice 2 (Le théorème de Cayley-Hamilton).

1. **Réduction de A** *:*
   (a) *A étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{C}$, donc la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe donc une matrice triangulaire supérieure T semblable à A, ce qui répond à la question.*

   (b) *On a $P^{-1}AP = T$ avec P inversible. Donc, pour tout complexe z :*

$$P^{-1}(zI_n - A)P = zP^{-1}P - P^{-1}AP = zI_n - T.$$

   Il s'ensuit

$$\det(zI_n - T) = \det(P^{-1}(zI_n - A)P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(zI_n - A) \times \det(P) = \det(zI_n - A).$$

   On a donc $\chi_T(z) = \chi_A(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ce qui montre que les polynômes caractéristiques $\chi_A(X)$ et $\chi_T(X)$ sont égaux.

   (c) *D'après la question précédente, on a $\chi_T(X) = \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.*
   Mais T étant triangulaire supérieure, on a aussi

$$\chi_T(X) = (X - t_{1,1})(X - t_{2,2}) \cdots (X - t_{n,n}).$$

   Donc les ensembles $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et $\{t_{1,1}, \cdots, t_{n,n}\}$ sont égaux, c'est-à-dire que les éléments diagonaux de T sont les λ_i.

2. **Démonstration du théorème** *:*
   (a) *Pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, n\}$, on a*

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = T^2 - (\lambda_i + \lambda_j)T + \lambda_i\lambda_j I_n,$$

   et cette expression est manifestement symétrique en λ_i et λ_j. Donc

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n).$$

   (b) *Fixons $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.*
   Le vecteur $(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1}$ est la $(k+1)^e$ colonne de la matrice $T - \lambda_{k+1} I_n$. Vu que $\lambda_{k+1} = t_{k+1,k+1}$, le coefficient $(T - \lambda_{k+1} I_n)[k+1, k+1]$ est nul, ainsi que les $(T - \lambda_{k+1} I_n)[l, k+1]$ pour $l \in \{k+2, \cdots, n\}$ puisque $(T - \lambda_{k+1} I_n)$ est triangulaire supérieure.
   Ceci montre que le vecteur $(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1}$ est de la forme :

$$(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (avec des 0 à partir de la ligne $k+1$), donc que ce vecteur est combinaison linéaire de $E_1, \cdots, E_k$, ce qui répond à la question.

   (c) *Montrons par récurrence forte sur k que $\forall k \in \{1, \cdots n\}$, $M_k E_k = 0_{\mathbb{C}^n}$.*
   - *La propriété est vraie pour $k = 1$. En effet*

$$M_1 E_1 = (T - \lambda_1 I_n)E_1 = TE_1 - \lambda_1 E_1.$$

     Or, TE_1 est la première colonne de T, donc $TE_1 = \lambda_1 E_1$, ce qui entraîne $M_1 E_1 = 0_{\mathbb{C}^n}$.
   - *Soit $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. Supposons que $M_j E_j = 0_{\mathbb{C}^n}$ pour $j \in \{1, \cdots, k\}$. On a*

$$M_{k+1}E_{k+1} = \prod_{j=1}^{k+1}(T - \lambda_j I_n)E_{k+1} = M_k(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1}.$$

Or, d'après la question précédente, il existe des nombres complexes $\beta_1, \cdots, \beta_k$ tels que

$$(T - \lambda_{k+1} I_n) E_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j E_j.$$

Donc

$$M_{k+1} E_{k+1} = M_k \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j E_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j (M_k E_j).$$

Mais pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$, on a

$$M_k E_j = (T - \lambda_k I_n) \cdots (T - \lambda_{j+1} I_n) \underbrace{M_j E_j}_{=0_{\mathbb{C}^n}} = 0_{\mathbb{C}^n}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence). Donc $M_{k+1} E_{k+1} = 0_{\mathbb{C}^n}$, ce qui montre que la propriété est héréditaire.

(d) *La question précédente montre que $M_n E_k = 0_{\mathbb{C}^n}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, puisque*

$$M_n E_k = (T - \lambda_n I_n) \cdots (T - \lambda_{k+1} I_n) \underbrace{M_k E_k}_{=0_{\mathbb{C}^n}}.$$

Les colonnes de la matrice carrée $M_n = (T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n) \cdots (T - \lambda_n I_n)$ sont donc toutes nulles, ce qui amène

$$(T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n) \cdots (T - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n.$$

(e) *On a $T = P^{-1} A P$, donc, d'après la question précédente, on obtient la relation*

$$(P^{-1} A P - \lambda_1 I_n)(P^{-1} A P - \lambda_2 I_n) \cdots (P^{-1} A P - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n.$$

Mais chaque facteur se réécrit :

$$P^{-1} A P - \lambda_k I_n = P^{-1}(A - \lambda_k I_n) P.$$

On a donc

$$P^{-1}(A - \lambda_1 I_n) \underbrace{P P^{-1}}_{=I_n} (A - \lambda_2 I_n) \underbrace{P P^{-1}}_{=I_n} \cdots \underbrace{P P^{-1}}_{=I_n} (A - \lambda_n I_n) P = \mathcal{O}_n,$$

c'est-à-dire

$$P^{-1}(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) P = \mathcal{O}_n.$$

Enfin, on multiplie à gauche par P et à droite par P^{-1}, pour obtenir

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \cdots (A - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n,$$

c'est-à-dire $\chi_A(A) = \mathcal{O}_n$.