DM11 : à rendre lundi 09/12/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices. Le second est plus difficile.

Exercice 1 (Equation matricielle).

1. Soit α un réel. On considère la matrice A à coefficients réels définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4+\alpha \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que 5 soit une valeur propre de A.

   On suppose que α prend désormais la valeur déterminée à la question précédente.

   (b) Déterminer le spectre de A.

   (c) Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $Tr(A)$ et $\det(A)$.

   (d) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Soit $(a; c) \in \mathbb{R}^2$ avec $\boldsymbol{c \neq 0}$. On considère la matrice B à coefficients réels définie par

$$B = \begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer le spectre de B.

   (b) Vérifier le résultat de la question précédente en considérant $Tr(B)$.

   (c) Montrer que B est diagonalisable.

   (d) Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}BP = D$.

   (e) On veut résoudre l'équation matricielle :

$$B \times N = N \times B \qquad (E_1),$$

   d'inconnue $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que N est solution de (E_1) si et seulement si la matrice $N' = P^{-1}NP$ est solution de l'équation :

$$D \times N' = N' \times D \qquad (E_2).$$

   Dans la suite, on note $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions N de l'équation (E_1), et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions N' de l'équation (E_2).

   (f) Montrer que $\mathcal{S}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathcal{S}_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est la même preuve).

   (g) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_2$.
   On pourra poser $N' = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdots$.

   (h) En déduire une base et la dimension de $\mathcal{S}_2$.

   (i) Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ définie par $\Phi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme, et déterminer Φ^{-1}.

   (j) En déduire une base et la dimension de $\mathcal{S}_1$.

Exercice 2 (Le théorème de Cayley-Hamilton).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_1 X - a_0$$

son polynôme caractéristique, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes (**non nécessairement distinctes**) de A. On a donc aussi

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_n).$$

Le but de cette partie est de montrer que $\boldsymbol{\chi_A(X)}$ **est un polynôme annulateur de** $\boldsymbol{A}$, c'est-à-dire :

$$(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)\cdots(A - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n,$$

où $\mathcal{O}_n$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. **Réduction de $\boldsymbol{A}$** :
   (a) Justifier l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telles que $A = PTP^{-1}$.
   (b) Montrer que A et T ont même polynôme caractéristique.
   (c) Justifier que les éléments diagonaux de T sont les λ_i.
2. **Démonstration du théorème** :
   On note $E_1, E_2, \cdots, E_n$ les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
   (a) Vérifier que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on a :
   $$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n).$$
   (b) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, on a
   $$(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1} \in Vect(E_1, \cdots, E_k).$$
   (c) On pose, pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$,
   $$M_k = (T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\cdots(T - \lambda_k I_n),$$
   que l'on peut noter $M_k = \prod_{j=1}^{k}(T - \lambda_j I_n)$, puisque les matrices du produit commutent deux à deux.
   Montrer par récurrence sur k que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $M_k E_k = 0_{\mathbb{C}^n}$.
   (d) En déduire que $(T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\cdots(T - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n$.
   (e) Conclure enfin que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)\cdots(A - \lambda_n I_n) = \mathcal{O}_n$.