Corrigé du DM10

Corrigé de l'exercice 1 (Séries de Bertrand).

1. *La fonction* $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} = \frac{e^{-\beta(\ln(\ln(x))}}{x}$ *est bien définie et continue sur* $[2;+\infty[$ *car pour tout* $x \geq 2$, $\ln(x) \geq \ln(2) > 0$, *donc* $\ln(\ln(x))$ *est bien défini.*
2. *Pour* $\beta \in \mathbb{R}$ *fixé, la fonction* $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ *est dérivable sur* $[2;+\infty[$, *et*

$$\forall x \geq 2, \qquad f'_\beta(x) = -\frac{(\ln(x))^\beta + x\beta(\ln(x))^{\beta-1} \times \frac{1}{x}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} = -\frac{\beta + \ln(x)}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}}.$$

Puisque $x^2(\ln(x))^{\beta+1} > 0$ *pour tout* $x \geq 2$, *on en déduit que la dérivée* f'_β *a le même signe que* $-(\ln(x)+\beta)$, *on a donc* $f'_\beta(x) \leq 0$ *pour* $x \geq e^{-\beta}$ *(et* $x \geq 2$*).*
En posant $n_0 = E(e^{-\beta}) + 2$, *on a donc* $n_0 \geq \max(2; e^{-\beta})$ *et* $\boxed{f_\beta \text{ décroissante sur } [n_0;+\infty[}$.

3. *En posant* $u(t) = \ln(t)$, *on a* $f_\beta(t) = \frac{1}{t}(\ln(t))^{-\beta} = u'(t)u^{-\beta}(t)$, *donc :*
   - $\boxed{\text{si } \beta \neq 1}$, *alors une primitive de* f_β *sur* $[2;+\infty[$ *est :*

$$\boxed{F_\beta(t) = \frac{u^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1} = \frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}}.$$

     On a donc $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(t) = +\infty$ *si* $\beta < 1$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(t) = 0$ *si* $\beta > 1$, *ce qui prouve que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\beta(x)dx$ *diverge si* $\beta < 1$ *et converge si* $\beta > 1$.
   - $\boxed{\text{si } \beta = 1}$, *alors* $f_\beta(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$, *donc une primitive de* f_β *sur* $[2;+\infty[$ *est :*

$$\boxed{F_\beta(t) = \ln(u(t)) = \ln(\ln(t))}.$$

     Dans ce cas, on a $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x) = +\infty$, *donc l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\beta(x)dx$ *diverge.*

   En conclusion, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\beta(x)dx$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.
4. *On peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale (puisque la fonction* f_β *est continue, décroissante et positive sur l'intervalle* $[n_0;+\infty[$*) : la série* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *est de même nature que l'intégrale* $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f_\beta(x)dx$, *qui converge si et seulement si* $\beta > 1$, *donc il en va de même pour la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.

Corrigé de l'exercice 2 (Série de terme général intégral).

1. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *La fonction* $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ *est continue sur le segment* $[k\pi, (k+1)\pi]$ *(c'est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), donc l'intégrale* $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ *est bien définie.*
2. *L'intégrale* $u_0 = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ *est impropre en* 0. *Mais* $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to0^+}{\sim} \sqrt{t}$, *donc la fonction* $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ *possède une limite finie (nulle) en* 0, *ce qui montre que l'intégrale* u_0 *est faussement impropre en* 0, *donc convergente.*

3. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles, on a*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

On effectue alors une intégration par parties, en primitivant $t \mapsto \sin(t)$ et en dérivant $t \mapsto t^{-1/2}$:

$$S_n = \left[-\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\right]_{\pi}^{(n+1)\pi} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt.$$

Puisque $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$ et $\cos(\pi) = -1$, ceci se réécrit :

$$S_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)\pi}} + \frac{-1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt,$$

ce qui est la relation voulue.

(b) *Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)\pi}} = 0$ (c'est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0). Ensuite, l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt$ est absolument convergente, puisque $\left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, et $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge. Cela entraîne la convergence de l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt$, et donc $\frac{1}{2}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt$ possède une limite finie quand $n \to +\infty$.*
Par somme de limites, on déduit de l'expression établie à la question précédente que S_n possède une limite finie lorsque $n \to +\infty$.
Nous avons montré que la suite (S_n) converge, donc la série $\sum u_k$ converge.

4. (a) *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $y = t - k\pi$ dans l'intégrale u_k :*

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y + k\pi)}{\sqrt{y + k\pi}} dy = \int_0^{\pi} \frac{(-1)^k \sin(y)}{\sqrt{y + k\pi}} dy.$$

On a donc bien $u_k = (-1)^k \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y + k\pi}} dy$.

(b) *Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.*
Tout d'abord, la suite (S_{2n}) est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(y)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{y + (2n+2)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{y + (2n+1)\pi}}\right)}_{\leq 0} dy \leq 0.$$

Ensuite, la suite (S_{2n+1}) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(y)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{y + (2n+2)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{y + (2n+3)\pi}}\right)}_{\geq 0} dy \geq 0.$$

Enfin, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$ car :

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = |u_{2n+1}| = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y + (2n+1)\pi}} dy \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{(2n+1)\pi}} dy = \frac{2}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Etant adjacentes, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent donc vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. Vu qu'il s'agit des sous-suites des termes pairs et impairs, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, donc la série $\sum u_k$ converge.

5. *D'après la question 4.(a), on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|u_k| = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y + k\pi}} dy$ (puisque cette intégrale est positive). Puisque $\frac{1}{\sqrt{y+k\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}$ pour tout $y \in [0;\pi]$, on en déduit par positivité de $\sin(y)$ et par croissance de l'intégrale la minoration voulue :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_k| \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{(k+1)\pi}} dy = \frac{2/\pi}{\sqrt{k+1}}.$$

6. *La série* $\sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *diverge (c'est une série de Riemann d'exposant* $\alpha \leq 1$ *puisque* $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$*), donc par comparaison de séries à termes positifs, on déduit de la question précédente que* $\sum |u_k|$ *diverge. La série* $\sum u_k$ *n'est donc pas absolument convergente.*
7. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. En utilisant la relation de Chasles, on a*
$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt.$$
Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*, on a en fait* $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = |u_k|$.
Pour le voir, on peut réutiliser le changement de variable $y = t - k\pi$ *:*
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(y+k\pi)}{\sqrt{y+k\pi}}\right| dy = \int_0^{\pi} \frac{|(-1)^k \sin(y)|}{\sqrt{y+k\pi}} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y+k\pi}} dy,$$
puisque $\sin(y) \geq 0$ *pour* $y \in [0;\pi]$*. Or, on a déjà vu que* $|u_k| = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y+k\pi}} dy$ *(voir 4.(a)), donc on a bien*
$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = \sum_{k=1}^{n} |u_k|.$$
8. *Puisque* $\sum |u_k|$ *diverge (voir 6.), on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n |u_k| = +\infty$ *(la suite des sommes partielles est croissante et divergente, donc elle tend vers* $+\infty$*). Donc d'après 7., on a*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = +\infty.$$
Ceci entraîne la divergence de l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt$*, puisque la fonction primitive* $x \mapsto \int_{\pi}^{x} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt$ *ne possède pas de limite en* $+\infty$*.*
En conclusion, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ *n'est pas absolument convergente.*