DM10 : à rendre lundi 02/12/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

Exercice 1 (Séries de Bertrand).

On fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_\beta : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$.

1. Montrer que f_β est continue sur $[2; +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que f_β est décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
   On pourra directement chercher une primitive de f_β.
4. Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 2 (Série de terme général intégral).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

1. Justifier que l'intégrale u_k est bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. L'intégrale u_0 est impropre. Est-elle convergente ?

On se propose de montrer que la série $\sum u_k$ converge de deux manières différentes.

Dans la suite, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Première méthode : en intégrant par parties*
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)\pi}} - \frac{1}{2}\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt.$$
   (b) En déduire que la suite (S_n) converge et conclure.
4. *Seconde méthode : avec les séries alternées*
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = (-1)^k \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(y)}{\sqrt{y + k\pi}} dy$.
   (b) En utilisant la relation montrée à la question précédente, montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et conclure.

On s'intéresse maintenant à la convergence absolue de la série $\sum u_k$.

5. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ |u_k| \geq \dfrac{C}{\sqrt{k+1}}$.
   On pourra utiliser la formule établie à la question 4.(a).
6. La série $\sum u_k$ est-elle absolument convergente ?

On termine en s'intéressant à la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\pi^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right| dt = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$.
8. L'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ est-elle absolument convergente ?