Corrigé du DM9

Corrigé de l'exercice 1 (Calcul de deux intégrales impropres).

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{x^2}$.

I) Intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}$

1. *La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$, ce qui montre que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et donc que φ se prolonge continûment à $\mathbb{R}$, en posant $\varphi(0) = 1$.*

2. *La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ n'est impropre qu'en $+\infty$. En outre, on a $0 \leq \varphi(x) = \frac{(\sin x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x > 0$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge. On peut donc conclure par comparaison que $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge.*
   Ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

3. *La fonction φ étant paire, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge et $\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$. Finalement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge, et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

   On a bien montré que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

II) Lien entre deux intégrales

4. • *On fait une intégration par parties, en posant $u(y) = 1-\cos(y)$ et $v(y) = \frac{1}{y}$ (les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$) :*

$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \int_a^b u'(y)v(y)\mathrm{d}y = [u(y)v(y)]_a^b - \int_a^b u(y)v'(y)\mathrm{d}y,$$

   c'est-à-dire

$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y.$$

   • *Ensuite, transformons l'intégrale $\int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y$ à l'aide du changement de variable $y = 2x$ ($\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$), on obtient*

$$\int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y = \int_{a/2}^{b/2} \frac{1-\cos(2x)}{2x^2}\mathrm{d}x.$$

   Or, $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$\int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y = \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

   ce qui prouve la formule voulue.

5. *D'après la formule précédente, on a donc, pour tout $0 < a < b$:*

$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos b}{b}\right] - \left[\frac{1-\cos a}{a}\right] + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

   Il faut procéder en **deux étapes séparées** *:*

- *On fixe $b > 0$ et on fait tendre a vers 0^+ : on a $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \frac{1-\cos a}{a} = 0$ (facile en faisant un DL), et $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x$ (puisque l'intégrale impropre $\int_0^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge). Ceci montre que*

$$\forall b > 0, \qquad \lim_{a\to 0^+} \int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{1-\cos b}{b} + \int_0^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ converge.

- *On fixe $a > 0$ et on fait tendre b vers $+\infty$: on a $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{1-\cos b}{b} = 0$ (facile en majorant $\left|\frac{1-\cos b}{b}\right| \leq \frac{2}{b}$ pour tout $b > 0$), et $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{a/2}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ (puisque l'intégrale impropre $\int_{a/2}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge). Ceci montre que*

$$\forall a > 0, \qquad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\cos a - 1}{a} + \int_{a/2}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ converge.

Les deux étapes précédentes montrent que l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ est convergente et que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y \\
&= 1 - \cos(1) + \int_0^{1/2} \varphi(x)\mathrm{d}x + \cos(1) - 1 + \int_{1/2}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \ , \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la parité de φ. Finalement, on a bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y.$$

III) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

6. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.*

   (a) *Notons $h_n : t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$.*
   On a $\sin((2n+1)t) \underset{t\to 0}{\sim} (2n+1)t$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} h_n(t) = 2n+1$, ce qui montre que la fonction h_n se prolonge continûment en 0 (en prenant la valeur $2n+1$).
   La fonction h_n est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge continûment en 0, d'où l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} h_n(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, donc convergente.

   (b) *On a $I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$$

(on peut utiliser la linéarité car les deux intégrales impropres sont convergentes). L'utilisation de la formule $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ *amène*

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+2)t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

On en déduit que la suite (I_n) *est constante, et donc que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

7. *Soit* h *l'application définie sur* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ *par*

$$h(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}.$$

   (a) *En réécrivant* $h(t) = \frac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$*, on a* $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{t}{6}$*, d'où le développement limité*

$$h(t) = \frac{t}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

   (b) *La fonction* h *se prolonge continûment en* 0 *(en posant* $h(0) = 0$*), car le DL précédent montre que* $h(t) \to 0$ *en* 0*. On a donc (puisque* h *est aussi continue sur* $]0; \frac{\pi}{2}]$*)* $h \in \mathcal{C}^0(\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R})$.
   En outre, la fonction h *est dérivable sur* $]0; \frac{\pi}{2}]$*, et l'existence du* DL_1 *en* 0 *montre que* h *est dérivable en* 0*, et que* $h(t) = h(0) + th'(0) + \underset{t\to 0}{o}(t)$.
   On en conclut que h *est dérivable sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *et que* $h'(0) = \frac{1}{6}$.

   (c) *Il reste à montrer que la dérivée* h' *est continue. On a, pour tout* $t \in]0; \frac{\pi}{2}]$,

$$h'(t) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)},$$

   ce qui montre que h' *est continue sur* $]0; \frac{\pi}{2}]$.
   En outre, on obtient facilement que $h'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})t^4}{t^4} = \frac{1}{6}$*, ce qui montre que* $\lim\limits_{t\to 0} h'(t) = \dfrac{1}{6} = h'(0)$*, et donc que* h' *est continue en* 0.
   En définitive, on a $h \in \mathcal{C}^1(\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R})$.

8. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$.

   (a) *L'intégrale* J_n *est faussement impropre en* 0*, car* $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ *est continue sur* $]0; \frac{\pi}{2}]$*, et tend vers* $2n+1$ *lorsque* $t \to 0$*, donc se prolonge continûment au segment* $[0; \frac{\pi}{2}]$*. L'intégrale* J_n *est donc convergente.*

   (b) *Par linéarité des intégrales impropres convergentes, on a*

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)h(t)\mathrm{d}t \to 0$$

   lorsque $n \to +\infty$ *(d'après la question* **III)** *7.(c)).*
   Connaissant la valeur des I_n *(elles valent* $\pi/2$ *indépendamment de* n *d'après la question* **III)** *6.(b)), on en déduit que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = I_n - \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)h(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

   (c) *Transformons* J_n *à l'aide du changement de variables* $y = (2n+1)t$*, on a alors*

$$J_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y.$$

Vu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y$ *converge et que* $\lim_{n \to +\infty} (n + \frac{1}{2})\pi = +\infty$, *on en déduit que*

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y.$$

Finalement, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y = \lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = 2 \times \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y = \pi.$$