DM9 : à rendre lundi 25/11/19

Exercice 1 (Calcul de deux intégrales impropres).
On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{x^2}$.

I) Intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que la fonction φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$.
   On le notera encore φ.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge.
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge.

II) Lien entre deux intégrales

4. Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que l'on a
$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$
5. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ ainsi que l'égalité
$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

III) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est faussement impropre.
   (b) Calculer I_0 puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$, en déduire I_n.
   Pour simplifier $I_{n+1} - I_n$, on pourra réécrire $\sin(p) - \sin(q)$ comme un produit, où p, q sont deux réels bien choisis.
7. Soit h l'application définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par
$$h(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}.$$
   (a) Montrer que h possède un développement limité d'ordre 1 en 0.
   (b) En déduire que h admet un prolongement continu et dérivable à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   On le note encore h. Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.
   (c) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   On en déduit ainsi que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\, h(t)\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *par le* **lemme de Riemann-Lebesgue** *(voir l'exercice 16 du TD5).*
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est convergente.
   (b) En utilisant les questions 6.(b) et 7.(c), montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.
   (c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$.
   On pourra utiliser un changement de variable.