Corrigé du DM8

Corrigé de l'exercice 1 (Lien entre l'intégrale d'une fonction et sa réciproque).

1. (a) *On sait que $f(0) = 0$ et f est bijective donc le seul antécédent de 0 par f est 0, ce qui prouve que $g(0) = 0$.*

   (b) *Pour tout réel $p > 0$, la fonction $f : x \mapsto x^p$ réalise une bijection de $[0; a]$ sur $[0; a^p]$ dont la réciproque est définie par $g(y) = \sqrt[p]{y} = y^{1/p}$. Alors, pour tout α tel que $0 \leq \alpha \leq a$,*

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy &= \int_0^\alpha x^p dx + \int_0^{\alpha^p} y^{1/p}dy = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^\alpha + \left[\frac{y^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\right]_0^{\alpha^p} \\ &= \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} + \frac{(\alpha^p)^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1} = \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} + \frac{p\alpha^{1+p}}{1+p} = \alpha^{p+1},\end{aligned}$$

   donc on a bien dans ce cas $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha)$.

2. (a) *Soit F une primitive de f sur $[0; a]$ et G une primitive de g sur $[0; f(a)]$ (elles existent car f et g sont continues). Les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on a pour tout $\alpha \in [0; a]$:*

$$\varphi(\alpha) = F(\alpha) - F(0) + G(f(\alpha)) - G(0) - \alpha f(\alpha).$$

   (b) *Etant de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions F et G sont a fortiori continues, tout comme f et g. Par composition, produit et somme de fonctions continues, la fonction φ est donc continue sur $[0; a]$.*

   (c) *La formule de la question 2(a) nous permet de voir que φ est la somme et la composée de fonctions dérivables donc, en vertu des théorèmes généraux de dérivabilité, φ est dérivable sur $]0; a[$. De plus, pour tout $\alpha \in]0; a[$:*

$$\varphi'(\alpha) = F'(\alpha) - 0 + G'(f(\alpha)) \times f'(\alpha) - 0 - f(\alpha) - \alpha \times f'(\alpha),$$

   c'est-à-dire

$$\varphi'(\alpha) = f(\alpha) + g(f(\alpha)) \times f'(\alpha) - f(\alpha) - \alpha \times f'(\alpha) = (g(f(\alpha)) - \alpha) \times f'(\alpha).$$

   Mais $g(f(\alpha)) = \alpha$ (puisque $g = f^{-1}$), donc

$$\varphi'(\alpha) = 0.$$

   La dérivée de φ est donc nulle sur l'intervalle $]0; a[$, ce qui montre que φ est constante sur $]0; a[$, donc sur $[0; a]$ (par prolongement continu).

   (d) *Puisque $f(0) = 0$, on a $\varphi(0) = F(0) - F(0) + G(f(0)) - G(0) - 0 = G(0) - G(0) = 0$. Donc $\varphi(\alpha) = \varphi(0) = 0$ pour tout $\alpha \in [0; a]$, c'est-à-dire*

$$\int_0^\alpha f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha).$$

3. *Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{f(\alpha)} g(y)dy$, on pose $y = f(x)$ (donc "$dy = f'(x)dx$").*
   Puisque $f(0) = 0$, le théorème de changement de variables donne alors :

$$\int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \int_{f(0)}^{f(\alpha)} g(y)dy = \int_0^\alpha g(f(x))f'(x)dx.$$

   Mais $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, donc

$$\int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \int_0^\alpha xf'(x)dx.$$

On fait alors une intégration par parties :

$$\int_0^\alpha xf'(x)dx = [xf(x)]_0^\alpha - \int_0^\alpha f(x)dx = \alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x)dx,$$

donc finalement :

$$\int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x)dx,$$

ce qui montre (E)*.*

4. (a) *Par linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int_0^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx\right)\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u=-x$ *dans la seconde intégrale, on obtient :*

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx = \int_0^{-1} \frac{u}{u^2-u\sqrt{2}+1}du = -\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx,$$

donc en reportant :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int_0^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx\end{aligned}$$

(d'après la relation de Chasles).

(b) *En effectuant le changement de variable* $u = x\sqrt{2}-1$ *(qui équivaut à* $x=\frac{u+1}{\sqrt{2}}$*), on obtient :*

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx = \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\frac{u+1}{\sqrt{2}}}{\frac{(u+1)^2}{2}-u} \times \frac{du}{\sqrt{2}} = \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{(u+1)du}{u^2+1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci se réécrit

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx &= \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{u\,du}{u^2+1} + \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{du}{u^2+1} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan(u)\right]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(4-2\sqrt{2}) - \ln(4+2\sqrt{2})\right] + \arctan(\sqrt{2}-1) - \arctan(-\sqrt{2}-1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + \arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1),\end{aligned}$$

(c) *La fonction* $h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$*, et*

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

donc h *est constante et pour tout* $x>0$*,* $h(x) = h(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$*.*

(d) *Puisque* $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ *et* $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$*, les deux questions précédentes donnent alors :*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \left(\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}.$$

La question 4.(*a*) *permet alors de conclure que :*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

5. (a) *La tangente et la racine carrée sont deux fonctions strictement croissantes (respectivement sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$ *et sur* $[0;+\infty[$*), donc leur composée* f_0 *est strictement croissante. Même chose pour la continuité :* f_0 *est la composée de deux fonctions continues, donc elle est continue sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$.
En revanche, $\sqrt{\ }$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *seulement,* tan *est dérivable sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$*, et* $\tan\left(]0;\frac{\pi}{4}[\right) =]0;1[$*, donc la composée* f_0 *est dérivable sur* $]0;\frac{\pi}{4}[$.

(b) *Etant continue et strictement croissante, la fonction* f_0 *réalise une bijection de* $[0;\frac{\pi}{4}]$ *sur son intervalle image* $[f_0(0); f_0(\frac{\pi}{4})] = [0;1]$*. Elle possède donc une fonction réciproque* $f_0^{-1} : [0;1] \to [0;\frac{\pi}{4}]$*. De plus,*

$$\forall (x,y) \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \times [0;1], \qquad y = f_0(x) \iff \tan(x) = y^2 \iff y = \arctan(y^2),$$

donc $f_0^{-1}(y) = \arctan(y^2)$ *pour tout* $y \in [0;1]$.

(c) *On effectue une intégration par parties sur le segment* $[0;1]$ *:*

$$\int_0^1 \arctan(y^2)dy = \left[y\arctan(y^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2y^2}{1+y^4}dy$$

(on peut car les fonctions $u : y \mapsto y$ *et* $v : y \mapsto \arctan(y^2)$ *sont bien de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur le segment* $[0;1]$*).*
En utilisant la question 4.(*d*)*, on obtient donc*

$$\int_0^1 \arctan(y^2)dy = \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{(1-\sqrt{2})\pi}{4}.$$

(d) *D'après (E) (qui s'applique car* $f_0(0) = 0$*), on a*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_0(x)dx + \int_0^{f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)} f_0^{-1}(y)dy = \frac{\pi}{4}f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx + \int_0^1 \arctan(y^2)dy = \frac{\pi}{4}.$$

On peut alors conclure en utilisant l'intégrale calculée en 5.(*c*) *:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(y^2)dy = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$