DM8 : à rendre lundi 18/11/19

La première partie est plus difficile, mais on pourra l'admettre et traiter la seconde.

Exercice 1 (Lien entre l'intégrale d'une fonction et de sa réciproque).
Dans ce problème, a est un réel strictement positif et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$** et telle que

$$f(0) = 0.$$

La fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une **réciproque, notée g.**

La fonction g est caractérisée par

$$\forall x \in [0, a]\,,\ \forall y \in [0, f(a)]\,,\ y = f(x) \iff x = g(y).$$

On remarquera que g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, f(a)]$.

Partie I

Dans cette première partie, on se propose de montrer que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$:

$$(E) \qquad \int_0^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\ \mathrm{d}y = \alpha f(\alpha).$$

1. *Quelques tests*
   (a) Calculer $g(0)$.
   (b) Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (E).
2. *Une première démonstration de (E).*
   Pour tout α réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :
   $$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\ \mathrm{d}y - \alpha f(\alpha).$$
   (a) En notant F et G des primitives respectives de f et g, exprimer $\varphi(\alpha)$ à l'aide de f, F et G.
   (b) En déduire que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.
   (c) Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0, a]$.
   (d) Calculer $\varphi(0)$ et en déduire l'égalité (E).
3. **Une seconde démonstration de (E).*
   Démontrer (E) en utilisant un changement de variable suivi d'une intégration par parties.

Partie II

Dans cette deuxième partie, on applique la formule (E) au calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\ \mathrm{d}x$.

4. *Calcul d'une première intégrale*
   On utilisera sans démonstration l'identité :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right).$$
   (a) Montrer que
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\ \mathrm{d}x.$$
   Indication : on utilisera l'identité précédente et un changement de variable.
   (b) En utilisant le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$, montrer que
   $$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) + \arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1).$$

(c) Démontrer la formule : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(d) En déduire finalement que
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

5. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

(a) Montrer que f_0 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

(b) Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1}, donner son ensemble de définition et calculer son expression.

(c) Calculer $\int_0^1 \arctan(y^2)\ \mathrm{d}y$ par intégration par parties.

(d) En utilisant (E) et la question précédente, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\ \mathrm{d}x$.