Corrigé du DM7

Corrigé de l'exercice 1 (Une étude de fonction).

1. *La fonction* arccos *est définie sur* $[-1;1]$ *(et à valeurs dans* $[0;\pi]$*), donc*

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R},\ \frac{2x}{1+x^2} \in [-1;1]\right\}.$$

Or,

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2 \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+2x+1 \geq 0 \\ x^2-2x+1 \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (x+1)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{array}\right.,$$

donc ces conditions sont vérifiées pour n'importe quel réel x.
On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}.}$

2. *Pour tout réel* x*, on a* $f(-x) = \arccos\left(-\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$*, mais* arccos *n'est ni paire ni impaire, donc* $\boxed{f \text{ n'est ni paire ni impaire}}$. *D'ailleurs* $f(-1) = \arccos(-1) = \pi$ *et* $f(1) = \arccos(1) = 0$*, donc* $f(-1) \neq f(1)$ *et* $f(-1) \neq -f(1)$.

3. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ *tend vers* 0 *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$*, donc par composition avec* arccos *(qui est continue en* 0*), on en déduit* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}}$.

4. *La fonction* $\arccos(x)$ *est dérivable sur* $]-1;1[$*, donc par composition, la fonction* f *est dérivable en tout point où* $\dfrac{2x}{1+x^2} \notin \{-1;1\}$. *Comme* $\left\{\begin{array}{l} \frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff x = 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} = -1 \iff x = -1 \end{array}\right.$*, on en déduit que* $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty,-1[, \text{ sur }]-1;1[\text{ et sur }]1;+\infty[}$. *En outre, pour tout réel* x *différent de* -1 *et* 1*, on a :*

$$f'(x) = \arccos'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Or :

$$\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{2x}{1+x^2}\right)\times\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \sqrt{\frac{(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)}{(1+x^2)^2}},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{|x^2-1|}{x^2+1}.$$

On en déduit que $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(1+x^2)}$*, c'est-à-dire* $\boxed{f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1[\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1;1[\\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{array}\right.}$.

On en conclut que f *est strictement croissante sur* $]-\infty;-1[$*, strictement décroissante sur* $]-1;1[$ *et strictement croissante sur* $]1;+\infty[$.
Puisque f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(*arccos *étant continue sur* $[-1;1]$*), on peut "refermer" ces intervalles, donc finalement :*
$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;-1]}$, $\boxed{\text{strictement décroissante sur } [-1;1]}$ *et* $\boxed{\text{strictement croissante sur } [1;+\infty[}$.

5. *Il faut montrer que les restrictions* $f_1 = f_{|[-1;1]}$ *et* $f_2 = f_{|[1;+\infty]}$ *sont dérivables en* $x = 1$.
On utilise pour cela le "théorème de prolongement de la dérivée" :

- *la fonction* $f_1 : [-1;1] \to \mathbb{R}$ *est continue sur* $[-1;1]$, *dérivable sur* $]-1;1[$, *et sa dérivée* $f_1' : x \mapsto \frac{-2}{1+x^2}$ *a une limite finie en* $x = 1$ *(qui vaut* -1*), donc* f_1 *est dérivable en* 1 *et* $f_1'(1) = -1$. *Ceci montre que* $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en } x = 1 \text{ et que } f_g'(1) = -1}$.
- *la fonction* $f_2 : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ *est continue sur* $[1;+\infty[$, *dérivable sur* $]1;+\infty[$, *et sa dérivée* $f_2' : x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ *a une limite finie en* $x = 1$ *(qui vaut* 1*), donc* f_2 *est dérivable en* 1 *et* $f_2'(1) = 1$. *Ceci montre que* $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } x = 1 \text{ et que } f_d'(1) = 1}$.

Interprétation graphique : la courbe représentative de f *possède* $\boxed{\text{deux demi-tangentes au point } (1; f(1)) = (1;0)}$ *: celle à gauche est de pente* -1, *et celle à droite est de pente* 1 *(elles sont donc perpendiculaires). Enfin,* $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } x = 1}$, *car* $f_g'(1) \neq f_d'(1)$.

Remarque.
On aurait pu aussi passer par des taux de variation, mais c'est plus compliqué...

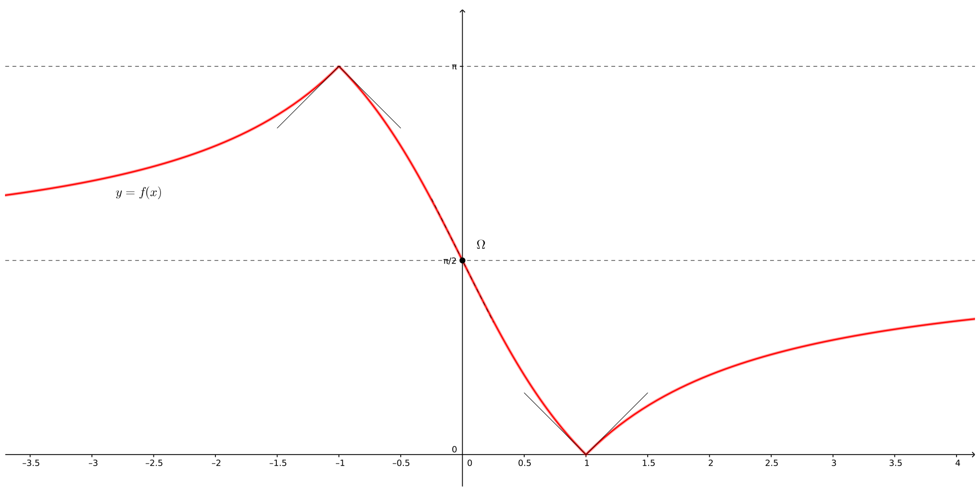
6. *On montre de même que les restrictions* $f_1 = f_{|_{[-1;1]}}$ *et* $f_3 = f_{|_{]-\infty;-1]}}$ *sont dérivables en* $x = -1$ *:*

$$f_g'(-1) = f_3'(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{2}{1+x^2} = 1,$$

$$f_d'(-1) = f_1'(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Vu que ces deux nombres dérivés sont différents, f *n'est pas non plus dérivable en* -1, *et sa courbe présente deux demi-tangentes perpendiculaires au point* $(-1; f(-1)) = (-1;\pi)$.

7. *Graphe de* f *(avec les demi-tangentes) :*



8. *Si* M' *est le symétrique de* $M = (x;y)$ *par rapport à* $\Omega = (0; \frac{\pi}{2})$, *alors* $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$, *ce qui amène* $M' = (-x; \pi - y)$. *Montrons alors l'équivalence* $M \in \mathcal{C} \iff M' \in \mathcal{C}$. *Cela revient à montrer que*

$$y = f(x) \iff \pi - y = f(-x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \pi - f(x).$$

Cela vient en fait de la formule $\arccos(-u) = \pi - \arccos(u)$, *donc voici la démonstration : pour* $u \in [-1;1]$, *notons* $\theta = \arccos(u) \in [0;\pi]$, *on a alors* $u = \cos(\theta)$, *et* $-u = \cos(\pi - \theta)$, *donc* $\arccos(-u) = \pi - \theta$ **puisque** $\boldsymbol{\pi - \theta}$ **est aussi dans** $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Finalement, on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \pi - f(x)}$, *ce qui montre que* $\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est bien symétrique par rapport au point } \Omega.}$

9. *Vu l'expression de $f'(x)$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty;-1[,]-1;1[$ et $]1;+\infty[$, on en déduit qu'il existe trois constantes réelles α, β, γ telles que*

$$f(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + \alpha & \text{si } x \in]-\infty;-1[\\ -2\arctan(x) + \beta & \text{si } x \in]-1;1[\\ 2\arctan(x) + \gamma & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}.$$

La valeur des limites de f en $\pm\infty$ montre que $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ et $\gamma = -\frac{\pi}{2}$. Enfin, $\beta = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$f(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty;-1[\\ -2\arctan(x) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in [-1;1] \\ 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

(l'expression sur $]-1;1[$ est aussi valable en ± 1 par continuité de f sur $\mathbb{R}$).

Corrigé de l'exercice 2 (Polynômes d'Hermite). 1. **Première partie**

(a) *La fonction $x \mapsto -x^2/2$ est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De même,* exp *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La composée f est donc de classe C^∞.*

(b) *Fixons un réel x. On a*

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2},$$
$$f''(x) = (x^2-1)e^{-x^2/2},$$
$$f'''(x) = (-x^3+3x)e^{-x^2/2}.$$

(c) *On procède par récurrence sur n :*

- *Pour $n = 0$, le résultat est vrai en posant $H_0 = 1$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x).$$

Calculons alors $f^{(n+1)}(x)$.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}(H_n(x)f(x)) = (-1)^n (H_n'(x) - xH_n(x)) f(x).$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)} H_{n+1}(x) f(x),$$

en posant

$$H_{n+1} = XH_n - H_n'.$$

(d) *Oui, car pour tout réel x, $f(x) \neq 0$, donc*

$$(-1)^n H_n(x) f(x) = (-1)^n \tilde{H}_n(x) f(x) \implies H_n(x) = \tilde{H}_n(x),$$

et donc $H_n = \tilde{H}_n$.

(e) *On conjecture facilement d'après les calculs des premières dérivées (qui montrent que $H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$, $H_3 = X^3 - 3X$) que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad deg(H_n) = n, \qquad c(H_n) = 1.$$

On le vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- *Pour $n = 0$, c'est vrai.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_n = X^n + Q_n$, avec $deg(Q_n) < n$. On a alors*

$$H_{n+1} = XH_n - H_n' = X(X^n + Q_n) - H_n' = X^{n+1} + (XQ_n - H_n').$$

Vu que $deg(XQ_n - H_n') \leq \max(deg(XQ_n), deg(H_n')) < n+1$, le monôme dominant de H_{n+1} est donc X^{n+1}, ce qui prouve le résultat.

2. **Seconde partie**

(a) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -xf(x)$.*

(b) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en dérivant n fois l'égalité précédente,*

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(-xf(x)) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x) f^{(k)}(x) = -\binom{n}{n-1} f^{(n-1)}(x) - \binom{n}{n} x f^{(n)}(x)$$

(les autres termes étant nuls). Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) + xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = 0,$$

ce qui se réécrit

$$\left((-1)^{n+1} H_{n+1}(x) + (-1)^n x H_n(x) + n(-1)^{n-1} H_{n-1}(x)\right) \times f(x) = 0.$$

On conclut en divisant par $(-1)^{n-1} f(x) \neq 0$.

(c) *On sait d'après la partie **1.** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$H_{n+1} = XH_n - H_n'.$$

*La formule de la question **2.(b)** se réécrit donc :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xH_n(x) - H_n'(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

(d) • *Pour $n \geq 2$, et $x \in \mathbb{R}$, on a (en appliquant deux fois la formule montrée en **2.(c)**)*

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x), \qquad H_n''(x) = nH_{n-1}'(x) = n(n-1)H_{n-2}(x).$$

*Or, d'après la formule montrée en **2.(b)**, on a*

$$H_n(x) - xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = 0,$$

donc en multipliant par n, on obtient

$$n(n-1)H_{n-2}(x) - xnH_{n-1}(x) + nH_n(x) = 0,$$

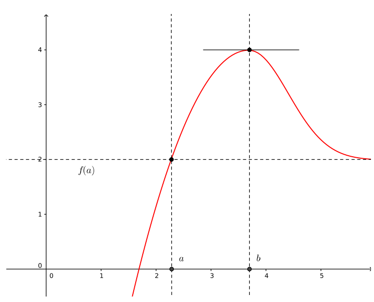
c'est-à-dire

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

• *La formule est trivialement vraie pour $n = 1$.*

3. **Troisième partie**

(a) *Illustration du théorème de Rolle généralisé :*



(b) • *Pour $n = 1$, le résultat est évident car $H_1 = X$ possède une seule racine réelle.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme H_n possède n racines réelles distinctes, notées*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Par définition de H_n, ces racines $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont aussi des zéros de la dérivée n^e de f, i.e.

$$f^{(n)}(x_1) = \cdots = f^{(n)}(x_n) = 0.$$

La fonction $f^{(n)}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle sur les intervalles $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, ce qui donne l'existence, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, d'un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que

$$f^{(n+1)}(c_i) = 0.$$

En outre, la fonction $f^{(n)}$ tend vers 0 en $\pm\infty$ car $f^{(n)}(x) \underset{\pm\infty}{\sim} (-1)^n x^n e^{-x^2/2}$ (puisque $H_n(x)$ est équivalent à son monôme dominant x^n).
On peut donc appliquer à $f^{(n)}$ le théorème de Rolle généralisé sur les intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_n, +\infty[$: il existe $c_0 \in]-\infty, x_1[$ et $c_n \in]x_n, +\infty[$ tels que

$$f^{(n+1)}(c_0) = f^{(n+1)}(c_n) = 0.$$

On a donc $n+1$ zéros de la fonction $f^{(n+1)}$ tels que :

$$c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n.$$

Vu que f ne s'annule jamais, ces zéros sont aussi des racines de H_{n+1}, par définition. Enfin, ils sont bien distincts.

(c) *Non, il n'y a pas d'autres racines, car $deg(H_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(d) *Démonstration du théorème de Rolle généralisé : on s'inspire de la démonstration du théorème de Rolle, qui utilise le théorème des bornes atteintes, mais ici le problème est que l'on n'est pas sur un segment.*
Tout d'abord, la fonction f est bornée sur $[a; +\infty[$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 > a$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon$$

(puisque $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$ par hypothèse). Ceci montre que f est bornée sur $[x_0, +\infty[$, et elle est également bornée sur le segment $[a; x_0]$ (d'après le théorème des bornes atteintes) car elle est continue.
En notant $m = \inf\limits_{[a;+\infty[} f$ et $M = \sup\limits_{[a;+\infty[} f$, on distingue deux cas :

- *si $m = M = f(a)$, alors f est constante sur $[a; +\infty[$, donc $f'(b) = 0$ pour tout $b > a$.*
- *si $M \neq f(a)$, alors $M > f(a)$. Fixons alors $\varepsilon > 0$ tel que $f(a) + \varepsilon < M$.*
  En reprenant les notations précédentes (avec x_0), on a

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \leq f(a) + \varepsilon < M,$$

  ce qui entraîne $M = \sup\limits_{[a;+\infty[} f = \sup\limits_{[a;x_0]} f$. D'après le théorème des bornes atteintes appliqué au segment $[a; x_0]$, il existe donc $b \in [a, x_0]$ tel que $f(b) = M$, et on a $b \neq a$ (sinon on aurait $M = f(a)$, ce qui est contradictoire). La fonction f atteint son maximum au point b qui n'est pas une extrémité de $[a; +\infty[$, donc on a $f'(b) = 0$.
- *si $m \neq f(a)$, c'est similaire.*