DM7 : à rendre mercredi 13/11/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

Exercice 1 (Une étude de fonction).
On considère la fonction $f : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer la fonction dérivée de f partout où elle existe. En déduire les variations de f.
5. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en $x = 1$, et interpréter cela graphiquement. La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?
6. Faire la même chose en $x = -1$.
7. Dessiner le graphe de f.
8. Montrer que le point $\Omega = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$.
   Indication : étant donné un point $M = (x; y)$, exprimer M', son symétrique par rapport à Ω, et montrer que $M \in \mathcal{C} \iff M' \in \mathcal{C}$.
9. Montrer que f s'exprime simplement à l'aide de la fonction arctan.

Exercice 2 (Polynômes d'Hermite).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

1. **Première partie**
   (a) Montrer que f est de classe C^∞.
   (b) Calculer $f^{(k)}(x)$, pour $0 \leq k \leq 3$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x).$$
   (d) Y a-t-il unicité du polynôme H_n pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé ?
   (e) Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **Deuxième partie**
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et x.
   (b) En déduire (en utilisant la formule de Leibniz) que
   $$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0.$$
   (c) Montrer que
   $$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$
   (d) Montrer que
   $$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

3. **Troisième partie**

(a) Le résultat suivant (que l'on admettra) est une version généralisée du théorème de Rolle :

Théorème 1 (Rolle généralisé).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Soit* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Alors il existe $b \in]a, +\infty[$ *tel que* $f'(b) = 0$.

Illustrer ce théorème par un dessin.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme H_n possède n racines réelles distinctes.

Indication : on pourra utiliser sans démonstration le théorème de Rolle, et sa version généralisée, en raisonnant sur les dérivées successives de f.

(c) Y a-t-il d'autres racines ?

(d) * Démontrer le théorème de Rolle généralisé.