Corrigé du DM6

Corrigé de l'exercice 1 (Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). *1. Pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ, on a*

$$\phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N),$$

donc ϕ_A est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette application est donc un endomorphisme.

Partie I : Etude d'un exemple avec $n = 2$

2. *Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -3 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)$.*
Donc A possède deux valeurs propres distinctes (de multiplicité 1) : 1 et 2.
Donc les sous-espaces propres E_1 et E_2 sont chacun de dimension 1, ce qui entraîne $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Ceci montre que A est diagonalisable.

3. *La matrice B étant triangulaire (supérieure), on obtient facilement ses valeurs propres : ce sont ses éléments diagonaux 1 et 2.*
Le sous-espace propre E_1 est $Ker(B-I_4) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
Le sous-espace propre E_2 est $Ker(B-2I_4) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
En notant $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient que la famille
$$\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3; u_4) = (e_1; e_2; 3e_1 + e_3; 3e_2 + e_4)$$
est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres, ce qui montre que B est diagonalisable.

4. *On a les relations :*
$$\phi_A(E_{1,1}) = AE_{1,1} = E_{1,1}, \quad \phi_A(E_{1,2}) = AE_{1,2} = E_{1,2},$$
$$\phi_A(E_{2,1}) = AE_{2,1} = 3E_{1,1} + 2E_{2,1}, \quad \phi_A(E_{2,2}) = AE_{2,2} = 3E_{1,2} + 2E_{2,2},$$
ce qui montre que la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

5. *Puisque la matrice B (qui représente ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$) est diagonalisable, l'endomorphisme ϕ_A est diagonalisable. On déduit de la question 3. que les valeurs propres de ϕ_A sont 1 et 2, et ses sous-espaces propres sont*
$$Ker(\phi_A - Id) = Vect\left(E_{1,1}; E_{1,2}\right), \qquad Ker(\phi_A - 2Id) = Vect\left(3E_{1,1} + E_{2,1}; 3E_{1,2} + E_{2,2}\right),$$
c'est-à-dire
$$Ker(\phi_A - Id) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \qquad Ker(\phi_A - 2Id) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Partie II : Réduction de l'endomorphisme ϕ_A dans le cas général

6. *Par hypothèse, on a $AM = \lambda M$, c'est-à-dire $(A - \lambda I_n)M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.*
Puisque M est non nulle, au moins une de ses colonnes est non nulle, disons C_j.
En notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc $C_j = Me_j \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, ainsi que
$$(A - \lambda I_n)C_j = (A - \lambda I_n)Me_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}e_j = 0_{\mathbb{R}^n}.$$
Le vecteur non nul $C_j \in \mathbb{R}^n$ est donc dans le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$, ce qui montre que $Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, et donc que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

7. *Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme ϕ_A, alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$. D'après la question précédente, cela entraîne que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, et donc que λ est valeur propre de A.*

8. *Supposons que le vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ soit la i^e colonne de la matrice M.*

   En notant $(C_1, \cdots, C_n)$ les colonnes de M, on a $C_j = \begin{cases} X & si\ j = i \\ 0_{\mathbb{R}^n} & si\ j \neq i \end{cases}$. Calculons alors le produit AM : la j^e colonne de AM est

   $$AC_j = \begin{cases} AX & si\ j = i \\ A \times 0_{\mathbb{R}^n} & si\ j \neq i \end{cases} = \begin{cases} \mu X & si\ j = i \\ 0_{\mathbb{R}^n} & si\ j \neq i \end{cases}.$$

   Ainsi, les colonnes de AM sont nulles, sauf la i^e qui vaut μX. On en conclut que $AM = \mu M$, c'est-à-dire $\phi_A(M) = \mu M$, donc la matrice non nulle M est un vecteur propre de ϕ_A (associé à la valeur propre μ).

9. *La question 8. montre que toute valeur propre de A est valeur propre de ϕ_A.*
   A la question 7., on avait prouvé que toute valeur propre de ϕ_A est valeur propre de A.
   Conclusion : les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_A sont exactement les mêmes que celles de la matrice A.

10. *Si A est diagonalisable, alors il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. Avec chaque vecteur X_i, on peut construire n matrices carrées dont les colonnes sont nulles sauf une qui vaut X_i. On les note (en colonnes) respectivement*

    $$M_{i,1} = (X_i, 0_{\mathbb{R}^n}, \cdots, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad M_{i,2} = (0_{\mathbb{R}^n}, X_i, 0_{\mathbb{R}^n}, \cdots, 0_{\mathbb{R}^n}), \qquad M_{i,n} = (0_{\mathbb{R}^n}, \cdots, 0_{\mathbb{R}^n}, X_i).$$

    Puisque i varie de 1 à n, on dispose donc au total de n^2 matrices $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui d'après la question 8. sont toutes des vecteurs propres de l'endomorphisme ϕ_A. Il reste à montrer que cette famille de n^2 vecteurs propres forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et il suffit pour cela de montrer qu'elle est libre (puisque $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$).

    Supposons donc que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, où les $\alpha_{i,j}$ sont des coefficients réels.

    Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ fixé, la k^e colonne de $M_{i,j}$ est X_i si $k = j$, et $0_{\mathbb{R}^n}$ si $k \neq j$.

    La k^e colonne de la matrice $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} M_{i,j}$ est donc le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} X_i$. Vu qu'on a supposé $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} X_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Mais la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ est libre (puisque c'est une base de $\mathbb{R}^n$), donc cela entraîne :

    $$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \alpha_{i,k} = 0.$$

    L'indice k étant quelconque dans $\{1, \cdots, n\}$, on a donc établi que

    $$\forall (k,i) \in \{1, \cdots, n\}^2, \qquad \alpha_{i,k} = 0,$$

    ce qui montre que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre.
    Finalement, on a construit à partir des vecteurs propres $(X_1, \cdots, X_n)$ une base $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée exclusivement de vecteurs propres de ϕ_A, ce qui prouve que l'endomorphisme ϕ_A est diagonalisable.