DM6 : à rendre lundi 14/10/19

Exercice 1 (Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, on considère l'application :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}.$$

1. Vérifier que ϕ_A est un endomorphisme.

Partie I : Etude d'un exemple avec $n = 2$

Dans cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, précisez une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres.
4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme ϕ_A dans la base $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?
   Si oui, précisez ses valeurs propres et une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A *(attention, on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).*

Partie II : Réduction de l'endomorphisme ϕ_A dans le cas général
On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$.
   Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible *(indication : examiner son noyau).*
7. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, alors c'est également une valeur propre de A.
8. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$.
   Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A.
9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A.
10. Montrer que si A est diagonalisable, alors ϕ_A l'est également
    (*on pourra, à partir d'une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, construire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A*).