Corrigé du DM5

Corrigé de l'exercice 1 (Un calcul de déterminant par récurrence).

1. *On obtient facilement*

$$D_2 = 1 + x^2 + x^4, \quad D_3 = 1 + x^2 + x^4 + x^6, \quad D_4 = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8.$$

2. *On conjecture donc :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D_n = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

3. *Soit $n \geq 3$. En développant D_n par rapport à sa première colonne, on obtient :*

$$D_n = (1+x^2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-1} - x\underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-1}.$$

Le premier de ces déterminants d'ordre $n-1$ est D_{n-1}.
Quant au second, on peut le développer par rapport à sa première ligne :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = x\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n-2} = xD_{n-2}.$$

Finalement, on a donc :

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}.$$

4. *Montrons par récurrence que*

$$\forall n \geq 2, \qquad D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)}(D_2 - D_1).$$

- *C'est vrai pour $n = 2$ car $x^{2(2-2)}(D_2 - D_1) = x^0(D_2 - D_1) = D_2 - D_1$.*
- *Soit $n \geq 2$. Si $D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)}(D_2 - D_1)$, alors en utilisant la relation montrée en 3. (avec $n+1 \geq 3$) :*

$$D_{n+1} - D_n = (1+x^2)D_n - x^2 D_{n-1} - D_n = x^2(D_n - D_{n-1}) = x^2 * x^{2(n-2)}(D_2 - D_1) = x^{2(n-1)}(D_2 - D_1).$$

La propriété voulue est vraie pour $n = 2$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

5. *En sommant la relation montrée en 4., on obtient :*

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n}(D_k - D_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} x^{2(k-2)}(D_2 - D_1) = (D_2 - D_1)\sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}.$$

Or, par téléscopage :

$$\sum_{k=2}^{n}(D_k - D_{k-1}) = D_n - D_1,$$

donc

$$D_n - D_1 = (D_2 - D_1)\sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} = x^4 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k+2} = \sum_{k=2}^{n} x^{2k}.$$

Finalement :

$$D_n = D_1 + \sum_{k=2}^{n} x^{2k} = 1 + x^2 + \sum_{k=2}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}.$$

Corrigé de l'exercice 2 (Coplanéarité, alignement).

A. Condition de coplanéarité de 4 points

1. *Supposons que $V \in Ker(f)$. Alors on a $LV = 0_{\mathbb{R}^4}$, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} x_1u + y_1v + z_1w + h = 0 \\ x_2u + y_2v + z_2w + h = 0 \\ x_3u + y_3v + z_3w + h = 0 \\ x_4u + y_4v + z_4w + h = 0 \end{cases}.$$

Si les trois premières composantes de V (c'est-à-dire u, v, w) sont nulles, alors le système équivaut à $h = 0$, ce qui entraîne $V = 0_{\mathbb{R}^4}$.
Ceci montre que dans $Ker(f)$, le seul vecteur ayant ses trois premières composantes nulles est $0_{\mathbb{R}^4}$. Il n'y a donc pas de vecteur non nul dont les trois premières composantes sont nulles.

2. *On sait que $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ ssi f n'est pas injective. Vu que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (donc même dimension à la source et au but), on a en outre l'équivalence*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Donc

$$Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \iff f \text{ non bijective} \iff L \text{ non inversible} \iff \det(L) = 0.$$

3. *Si V est non nul et dans $Ker(f)$, alors (d'après la question 1.), on a $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, et*

$$ux_i + vy_i + wz_i + h = 0 \text{ pour tout } i \in \{1; 2; 3; 4\},$$

donc le point M_i vérifie l'équation cartésienne $ux + vy + wz + h = 0$.
Cette équation cartésienne est bien celle d'un plan de l'espace E car les coefficients des variables x, y, z sont non tous nuls (puisque $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$). On peut également dire que le vecteur $\overrightarrow{n} = (u; v; w)$ est normal à ce plan.
Finalement, $ux+vy+wz+h = 0$ est l'équation du plan normal à $\overrightarrow{n}$ et passant par M_1, M_2, M_3, M_4.

4. • *Si M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires, alors il existe un plan $\mathcal{P}$ de E qui contient ces quatre points. Ce plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme*

$$ux + vy + wz + h = 0, \text{ avec } (u, v, w, h) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } (u, v, w) \neq (0, 0, 0),$$

qui est vérifiée par les quatre points. On a donc

$$\begin{cases} x_1u + y_1v + z_1w + h = 0 \\ x_2u + y_2v + z_2w + h = 0 \\ x_3u + y_3v + z_3w + h = 0 \\ x_4u + y_4v + z_4w + h = 0 \end{cases},$$

ce qui montre que le vecteur non nul $V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{pmatrix}$ est dans $Ker(f)$, puisque $LV = 0_{\mathbb{R}^4}$.
On a donc $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, ce qui entraîne $\det(L) = 0$ (d'après 2.)

- *Si* $\det(L) = 0$*, alors* $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ *(d'après 2.), donc il existe* $V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{pmatrix}$ *non nul dans* $Ker(f)$*. La question 3. montre alors qu'il existe un plan contenant les quatre points* M_1, M_2, M_3, M_4*, qui sont donc coplanaires.*

Finalement, on a l'équivalence voulue :

$$M_1, M_2, M_3, M_4 \text{ sont coplanaires} \iff \det(L) = 0.$$

B. Condition d'alignement de 3 points

5. *Puisque* $rg(S) \leq 2$*, les trois lignes de* S *(c'est-à-dire les vecteurs* V_1, V_2, V_3*) ne sont pas linéairement indépendantes. La famille* (V_1, V_2, V_3) *est donc liée. Pour tout point* $M_4 = (x_4, y_4, z_4)$*, on en déduit que la sur-famille* (V_1, V_2, V_3, V_4) *(formée des quatres lignes de* L*) est aussi liée, donc la matrice* L *n'est pas inversible, c'est-à-dire* $\det(L) = 0$*.*
On en déduit que M_1, M_2, M_3 *sont alignés. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un unique plan contenant ces trois points, et donc il serait possible de construire un quatrième point* M_4 *tel que* M_1, M_2, M_3, M_4 *ne soient pas coplanaires. D'après la question 4., cela impliquerait* $\det(L) \neq 0$*. Mais on sait ici que* $\det(L) = 0$ *pour tout point* M_4*, donc les trois points* M_1, M_2, M_3 *sont alignés.*
6. - *La question précédente montre que si* $rg(S) \leq 2$*, alors* M_1, M_2, M_3 *sont alignés.*
   - *Si* M_1, M_2, M_3 *sont alignés, alors les vecteurs* $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$ *sont colinéaires.*
   En outre,
   $$S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Les deux vecteurs lignes de cette dernière matrice sont donc colinéaires, ce qui entraîne que $rg(S) \leq 2$*.*

Finalement, on a l'équivalence voulue :

$$rg(S) \leq 2 \iff M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés .}$$

C. On suppose que $M_1 \neq M_2$.

7. *Le rang de la famille* (V_1, V_2) *est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*. Or,*
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$
Vu qu'au moins un des trois coefficients $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ *est non nul (puisque* $M_1 \neq M_2$*), on en déduit que les deux colonnes sont linéairement indépendantes, et donc que la famille* (V_1, V_2) *est de rang 2, donc libre.*
8. *La question 6. montre que* M_1, M_2, M_3 *sont alignés ssi* $rg(S) \leq 2$*, c'est-à-dire ssi les trois lignes de* S *sont liées. On a donc*
$$M_1, M_2, M_3 \text{ alignés} \iff \text{la famille } (V_1, V_2, V_3) \text{ est liée.}$$
La sous-famille (V_1, V_2) *étant libre, on en déduit que*
$$M_1, M_2, M_3 \text{ alignés} \iff V_3 \text{ est combinaison linéaire de la famille } (V_1, V_2).$$

Mais pour tous $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$V_3 = \mu V_1 + \lambda V_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \mu x_1 + \lambda x_2 \\ y_3 = \mu y_1 + \lambda y_2 \\ z_3 = \mu z_1 + \lambda z_2 \\ 1 = \mu + \lambda \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 - \mu \\ x_3 = \mu x_1 + (1-\mu) x_2 \\ y_3 = \mu y_1 + (1-\mu) y_2 \\ z_3 = \mu z_1 + (1-\mu) z_2 \end{array} \right. ,$$

donc

$$M_1, M_2, M_3 \text{ alignés } \iff V_3 = \mu V_1 + (1-\mu) V_2 \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

D. On suppose ici que les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont alignés et tous distincts.

9. *On a* $M_1 \neq M_2$, *et* M_1, M_2, M_3 *alignés donc d'après la question 8., le vecteur ligne* V_3 *est combinaison linéaire de* (V_1, V_2).
   En raisonnant de même avec le point M_4, *on obtient (puisque* $M_1 \neq M_2$ *et* M_1, M_2, M_4 *sont alignés) que* V_4 *est lui aussi combinaison linéaire de* (V_1, V_2).
   Ceci montre que les deux dernières lignes de L *(i.e.* V_3 *et* V_4*) sont chacune combinaison linéaire des deux premières* (V_1, V_2).

10. *Le rang de* L *est le nombre maximal de lignes de* L *linéairement indépendantes.*
    Vu que (V_1, V_2) *est libre, que* $V_3 \in Vect(V_1, V_2)$ *et que* $V_4 \in Vect(V_1, V_2)$, *on en déduit que*

$$rg(L) = 2.$$

En appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme f, *on conclut :*

$$\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - rg(f) = 4 - rg(L) = 2.$$