# DM5 : à rendre lundi 07/10/19

Vous traiterez au choix un ou plusieurs exercices.

**Exercice 1 (Un calcul de déterminant par récurrence).**

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$ (déterminant $n \times n$).

On a donc $D_1 = 1 + x^2$.

1. Calculer $D_2$, $D_3$ et $D_4$.
2. Conjecturer la valeur de $D_n$.
3. Fixons un entier $n \geq 3$. En développant $D_n$, par rapport à la première colonne, montrer que
$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}.$$
4. En déduire par récurrence que
$$\forall n \geq 2, \qquad D_n - D_{n-1} = x^{2(n-2)}(D_2 - D_1).$$
5. En déduire une preuve de la conjecture faite à la question 2.

**Exercice 2 (Coplanéarité, alignement).**
*Pour traiter correctement ce sujet, il est fortement conseillé de revoir rapidement le cours de sup correspondant (il s'agit du chapitre 8 : "Géométrie dans l'espace").*

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, muni de son repère canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
On considère quatre points $M_1, M_2, M_3, M_4$ de coordonnées respectives :

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2), \qquad (x_3, y_3, z_3), \qquad (x_4, y_4, z_4).$$

On considère également quatre nombres réels $u, v, w, h$, et les matrices :

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{pmatrix}.$$

On considère $V$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$ ; on note $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire ayant $L$ pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On note $V_1, V_2, V_3, V_4$ les vecteurs **lignes** de $L$.

**A. Condition de coplanéarité de 4 points**

1. En examinant le produit $LV$, montrer qu'il n'y pas dans $Ker(f)$ de vecteur non nul dont les trois premières composantes soient nulles.
2. Montrer que $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ si et seulement si $\det(L) = 0$.
3. Montrer que si $V$ est non nul et appartient à $Ker(f)$, alors
$$ux + vy + wz + h = 0$$
est l'équation cartésienne d'un plan de $E$ contenant les points $M_1, M_2, M_3, M_4$.
4. Montrer que $M_1, M_2, M_3, M_4$ sont coplanaires si et seulement si $\det(L) = 0$.

**B. Condition d'alignement de 3 points**

5. On suppose que le rang de $S$ est inférieur ou égal à 2.
   Montrer que, quel que soit $M_4$, on a $\det(L) = 0$. En déduire que $M_1, M_2, M_3$ sont alignés.
6. Montrer que $rg(S) \leq 2$ si seulement si $M_1, M_2, M_3$ sont alignés.

**C. On suppose que $M_1 \neq M_2$.**

7. Montrer que la famille des deux vecteurs lignes $(V_1, V_2)$ est libre.
8. Montrer que $M_1, M_2, M_3$ sont alignés si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu) V_2.$$

**D. On suppose ici que les points $M_1, M_2, M_3, M_4$ sont alignés et tous distincts.**

9. Montrer que les deux dernières lignes de la matrice $L$ sont chacune combinaison linéaire des deux premières.
10. Qu'en résulte-t-il pour le rang de $L$ et la dimension de $Ker(f)$ ?