Corrigé du DM4

Corrigé de l'exercice 1 (Endomorphisme avec trois polynômes).

1. **a)** *Un calcul simple montre que*

$$\boxed{\forall i \neq j, \quad L_i(a_j) = 0 \quad \text{et} \quad L_i(a_i) = 1}$$

b) *Montrons que la famille est libre ; pour cela, posons* $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$ *; en passant aux fonctions polynomiales associées, cette égalité s'écrit :* $\lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x) + \lambda_3 L_3(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$x = a_1$ *donne* $\lambda_1 L_1(a_1) + \lambda_2 L_2(a_1) + \lambda_3 L_3(a_1) = 0 \iff \lambda_1 = 0$
$x = a_2$ *donne* $\lambda_1 L_1(a_2) + \lambda_2 L_2(a_2) + \lambda_3 L_3(a_3) = 0 \iff \lambda_2 = 0$
$x = a_1$ *donne* $\lambda_1 L_1(a_3) + \lambda_2 L_2(a_3) + \lambda_3 L_3(a_3) = 0 \iff \lambda_3 = 0$
La famille est libre et composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$*, espace vectoriel de dimension trois, donc*

$$\boxed{\big(L_1, L_2, L_3\big) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

c) *Soit* $P(x) = \lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x) + \lambda_3 L_3(x)$ *; en remplaçant* x *par* a_i*, pour* $i \in [\![1,3]\!]$*, il vient* $\lambda_i = P(a_i)$ *donc*

$$\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ dans } \big(L_1, L_2, L_3\big) \text{ sont } \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big)}$$

2. *Tout d'abord* $\forall P \in \mathbb{R}[X] = E$, $f(P) \in \mathbb{R}[X] = E$ *et donc* E *est stable par* f.
Ensuite, soient $(P, Q) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(a_1)P_1 + (\lambda P + Q)(a_2)P_2 + (\lambda P + Q)(a_3)P_3 \\ &= \lambda\big(P(a_1)P_1 + P(a_2)P_2 + P(a_3)P_3\big) + \big(Q(a_1)P_1 + Q(a_2)P_2 + Q(a_3)P_3\big) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

et ainsi f *est linéaire ;* $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } E}$

3. *Soit* $n = \max\big(\deg(P_1), \deg(P_2), \deg(P_3)\big)$ *;* $f(P)$ *est combinaison linéaire des polynômes* P_1*,* P_2 *et* P_3 *donc* $\deg(f(P)) \leq n$*. Un polynôme de degré strictement supérieur à* n *n'a donc pas d'antécédent par* f *et ainsi*

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$$

4. **a)** $P \in Ker(f) \iff f(P) = 0 \iff P(a_1)P_1 + P(a_2)P_2 + P(a_3)P_3 = 0$ *; or* $\big(P_1, P_2, P_3\big)$ *est une famille libre, donc* $P \in Ker(f) \iff P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$*, soit*

$$\boxed{P \in Ker(f) \text{ si, et seulement si } a_1,\ a_2 \text{ et } a_3 \text{ sont des racines de } P}$$

b) *Si la famille* $\big(P_1, P_2, P_3\big)$ *est liée, alors il existe une combinaison linéaire non triviale nulle, c'est-à-dire :*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0),\ \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$$

Posons $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ *; alors* $P(a_1) = \lambda_1$*,* $P(a_2) = \lambda_2$ *et* $P(a_3) = \lambda_3$*. On a alors :*

$$P(a_1)P_1 + P(a_2)P_2 + P(a_3)P_3 = 0$$

ainsi $P \in Ker(f)$ *; de plus ce polynôme* P *n'est pas nul et, comme* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$*,* P *n'est pas divisible par* $Q(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$*.*

$$\boxed{\exists P \neq 0 \text{ et non divisible par } Q,\ P \in Ker(f)}$$

c) *Si la famille* $\big(P_1, P_2, P_3\big)$ *est libre alors* $Q \in Ker(f)$ *et* $Q \neq 0$ *et si la famille est liée, on vient de montrer l'existence d'un polynôme non nul de* $Ker(f)$ *donc*

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$$

5. *Tout d'abord, la restriction de f à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est encore linéaire.*
Ensuite, pour tout $P \in E_n$, $f(P)$ est une combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2 et P_3 de E_n ; donc $\deg(f(P)) \leq n$ et $f(P) \in E_n$.

$$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } E_n \text{ est un endomorphisme de } E_n}$$

6. **a)** *Par définition, $f_n(P)$ est combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2 et P_3 , donc $Im(f_n) \subset Vect\big(P_1, P_2, P_3\big)$.*
Réciproquement, soit $R \in Vect\big(P_1, P_2, P_3\big)$, alors $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$.
En posant $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$, on a $P(a_1) = \lambda_1$, $P(a_2) = \lambda_2$ et $P(a_3) = \lambda_3$; ainsi $R = f_n(P) \in Im(f_n)$.
On vient de montrer $Vect\big(P_1, P_2, P_3\big) \subset Im(f_n)$ et, finalement, $\boxed{Im(f_n) = Vect\big(P_1, P_2, P_3\big)}$

b) *D'après le théorème du rang : $\dim\big(E_n\big) = \dim\big(Ker(f_n)\big) + \dim\big(Im(f_n)\big)$; or la famille $\big(P_1, P_2, P_3\big)$ est libre donc $\dim\big(Im(f_n)\big) = 3$ et on sait que $\dim\big(E_n\big) = n+1$ donc* $\boxed{\dim\big(Ker(f_n)\big) = n-2}$

c) *D'après la question* **Q4. a)** *$P \in Ker(f_n)$ si, et seulement si a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P, soit si, et seulement si P est divisible par $Q = (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$; ainsi les vecteurs $Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q$ sont des vecteurs générateurs de $Ker(f_n)$.*
Par construction, ces vecteurs sont de degrés échelonnés, donc sont libres et ainsi :

$$\boxed{Ker(f_n) = Vect\big(Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q\big)}$$

7. **a)** *La famille $\big(P_1, P_2, P_3, Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q\big)$ contient $n+1$ vecteurs, montrons qu'ils sont libres ; pour cela posons : $\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) + \lambda_4 Q(x) + \lambda_5 xQ(x) + \cdots + \lambda_{n+1} x^{n-3} Q(x) = 0$;*
$x = a_1$ donne $\lambda_1 P_1(a_1) = 0$, or $P(a_1) \neq 0$ car P_1 est un polynôme de degré 2 qui possède déjà les deux racines a_2 et a_3, donc $\lambda_1 = 0$; de même, $x = a_2$ donne $\lambda_2 = 0$ et $x = a_3$ donne $\lambda_3 = 0$; dans l'égalité précédente, il ne reste plus que les vecteurs formant une base de $Ker(f_n)$, ils sont donc libres. Les cœfficients sont donc tous nuls, les $n+1$ vecteurs sont libres et

$$\boxed{\text{la famille } \big(P_1, P_2, P_3, Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q\big) \text{ est une base de } E_n}$$

b) *Notons A la matrice de f_n dans la base $\big(P_1, P_2, P_3, Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q\big)$.*
Vu que $\big(Q, XQ, X^2Q, ..., X^{n-3}Q\big)$ est une base de $Ker(f_n)$, ces vecteurs ont une image nulle par f_n, donc les $n-2$ dernières colonnes de A sont nulles.
Ensuite, $P_1(a_2) = P_1(a_3) = 0$ par hypothèse, donc $f_n(P_1) = P_1(a_1)P_1$. De même, on a $f_n(P_2) = P_2(a_2)P_2$ et $f_n(P_3) = P_3(a_3)P_3$, donc finalement :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2(a_2) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_3(a_3) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}.$$

8. *Déterminons matriciellement le rang de la la famille $\big(P_1, P_2, P_3\big)$:*

$$Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice échelonnée possède 3 pivots donc $\boxed{\text{la famille } \big(P_1, P_2, P_3\big) \text{ est de rang 3 donc libre.}}$

9. *On a $f(P) = P(a_1)P_1 + P(a_2)P_2 + P(a_3)P_3$ donc :*

$$f(1) = X^2 + X + 1 + X^2 - 2X - 3X + 1 = 2X^2 - 4X + 2,$$

$$f(X) = -2(X^2 + X + 1) - 3X + 1 = -2X^2 - 5X - 1,$$
$$f(X^2) = 4(X^2 + X + 1) - 3X + 1 = 4X^2 + X + 5,$$
$$f(X^3) = -8(X^2 + X + 1) - 3X + 1 = -8X^2 - 11X - 7.$$

On en déduit :

$$\boxed{Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -7 \\ -4 & -5 & 1 & -11 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

10. *On rappelle que* $P \in Ker(f) \iff Q = X(X+2)(X-1)$ *divise* P *; or* $P \in \mathbb{R}_3[X]$*, donc* $\deg(P) \leq 3$ *et ainsi*

$$\boxed{Ker(f_3) = Vect\big(X(X+2)(X-1)\big)}$$

11. $P_1 = (X-1)(X-2)$ *;* $P_2 = (X+1)(X-2)$ *et* $P_3 = 2(X-1)(X+1)$ *; on écrit* $\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) = 0$ *;* $x = 1$ *donne* $\lambda_2 = 0$*,* $x = 2$ *donne* $\lambda_3 = 0$ *et* $x = -1$ *donne* $\lambda_1 = 0$ *et donc* $\boxed{\big(P_1, P_2, P_3\big) \text{ est libre}}$

12. *De même que précédemment :*

$$\boxed{Ker(f_6) = Vect\big(Q, XQ, X^2Q, X^3Q\big) \text{ avec } Q = (X+1)(X-1)(X-2)}$$

13. *La famille* $\big(P_1, P_2, P_3\big)$ *est libre et les polynômes* P_1*,* P_2 *et* P_3 *sont de degré* 2 *et admettent pour racines respectivement* a_2 *et* a_3*,* a_1 *et* a_3*,* a_1 *et* a_2*. Donc on est dans le cadre des questions 7.(a) et 7.(b) : la matrice de* f_6 *dans la base* $(P_1, P_2, P_3, Q, XQ, X^2Q, X^3Q)$ *est :*

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2(a_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3(a_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$