DM4 : à rendre lundi 30/09/19

Exercice 1 (Endomorphisme avec trois polynômes).
On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, avec $n \in \mathbb{N}$.
Dans l'ensemble de l'exercice, P_1, P_2, P_3 désignent trois polynômes distincts de $\mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts.
On considère l'application f définie sur E par

$$\forall P \in E, \qquad f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

Partie I : Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

1. Soient les polynômes :

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}(X - a_2)(X - a_3), \\[2ex] L_2 = \dfrac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}(X - a_1)(X - a_3), \\[2ex] L_3 = \dfrac{1}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2). \end{cases}$$

   (a) Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$.
   (b) Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. L'application f est-elle surjective ?
   On pourra s'intéresser aux degrés des polynômes P_1, P_2, P_3 et $f(P)$ pour $P \in E$.
4. (a) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
   Montrer que, dans ce cas, P appartient à $Ker(f)$ si et seulement si les trois réels a_1, a_2, a_3 sont des racines de P.
   (b) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.
   Montrer que, dans ce cas, il existe un polynôme P non nul et non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$, appartenant à $Ker(f)$.
   On pourra exprimer P en fonction des polynômes L_1, L_2, L_3.
   (c) L'application f est-elle injective ?

Partie II : Restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$

On suppose dans cette partie que la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de E_n et que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

5. Montrer que la restriction de f à E_n définit un endomorphisme de E_n.
   On notera désormais f_n l'application définie par :

$$f_n : E_n \to E_n, \qquad f_n(P) = f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

6. On rappelle que $Im(f_n)$ et $Ker(f_n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n.
   (a) Montrer que $Im(f_n) = Vect(P_1, P_2, P_3)$.
   (b) Montrer que $\dim(Ker(f_n)) = n - 2$.
   (c) Déterminer une base de $Ker(f_n)$.
7. On suppose, dans cette question uniquement, que les polynômes P_1, P_2, P_3 sont de degré 2 et admettent pour racines respectives a_2 et a_3, a_1 et a_3, a_1 et a_2.

(a) Montrer que la réunion de la famille (P_1, P_2, P_3) et de la base de $Ker(f_n)$ déterminée à la question précédente constitue une base de E_n.

(b) Ecrire la matrice de f_n dans cette base.

Partie III : Etude d'un cas particulier avec $n = 3$

Dans cette partie, $n = 3$, $E_3 = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 2X, \qquad P_3 = -3X + 1, \qquad a_1 = -2, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 1.$$

8. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?
9. Déterminer la matrice de f_3 dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ de E_3.
10. Déterminer $Ker(f_3)$ et une base de $Ker(f_3)$.

Partie IV : Etude d'un cas particulier avec $n = 6$

Dans cette partie, $n = 6$, $E_6 = \mathbb{R}_6[X]$ et :

$$P_1 = X^2 - 3X + 2, \quad P_2 = X^2 - X - 2, \qquad P_3 = 2X^2 - 2, \qquad a_1 = -1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 2.$$

11. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?
12. Déterminer $Ker(f_6)$ et une base de $Ker(f_6)$.
13. En utilisant les questions 7.(a) et 7.(b), déterminer une base de E_6 dans laquelle la matrice de f_6 est diagonale, et donner cette matrice.