Corrigé du DM3

Corrigé de l'exercice 1 (Polynômes annulateurs et projecteurs).
Partie I : Etude d'un exemple

1. *La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$
   Donc $A^2 = 2A + 3I_3$, ce qui montre que $f^2 = 2f + 3Id$.
   L'endomorphisme f vérifie donc la relation $(*)$.

2. *On a* $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *donc* $Ker(A - 3I_3) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3,\ z = -x - y\}$.

   On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *est une base de $G = Ker(f - 3Id)$ et donc que* $\dim(G) = 2$.

3. *On a* $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *donc*
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A+I_3) \iff \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = 2x \end{cases}.$$
   On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de $H = Ker(f + Id)$ et donc que* $\dim(H) = 1$.

4. - *On a $G \cap H = \{(0, 0, 0)\}$: en effet, si $(x, y, z) \in G \cap H$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$
     (car $(x, y, z) \in H$). De plus, ce vecteur vérifie l'équation cartésienne de G, donc
$$\alpha + 2\alpha + \alpha = 0,$$
     c'est-à-dire $\alpha = 0$, et donc $(x, y, z) = \{(0, 0, 0)\}$.
   - *De plus, on a* $\dim(G) + \dim(H) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

   Donc les sous-espaces G et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5. *Il suffit de réunir les bases de G et H que l'on a déterminé dans les questions 2. et 3. : en posant*
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   on obtient que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

6. *Pour déterminer D, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on donne deux méthodes :*

- **1re méthode : avec les formules de changement de base**
On a $D = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On obtient après calculs $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- **2e méthode : on exprime les $\boldsymbol{f(u_i)}$ en fonction des $\boldsymbol{u_i}$** *: on construit ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ colonne par colonne :*
$$f(u_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3u_1,$$
$$f(u_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3u_2,$$
$$f(u_3) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_3,$$
donc $D = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. *On a facilement*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix},$$
mais aussi
$$\begin{aligned} & \left(\tfrac{3^n+3\times(-1)^n}{4}\right) I_3 + \left(\tfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right) D \\ = & \left(\tfrac{3^n+3\times(-1)^n}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = & \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\times 3^n + 3(-1)^n + 3(-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 4\times 3^n + 3(-1)^n + 3(-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3(-1)^n + (-1)^n \end{pmatrix} \\ = & \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\times 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 4\times 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4\times(-1)^n \end{pmatrix} = D^n. \end{aligned}$$
Vu que la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$ est D^n, on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = \left(\frac{3^n + 3\times(-1)^n}{4}\right) Id + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right) f.$$

Partie II : Cas général

1. *Si $x \in G$, alors $(f - 3Id)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) = 3x$.*
De même, si $x \in H$, alors $(f + Id)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) = -x$.
2. *Si $x \in G \cap H$, alors $f(x) = 3x$ et $f(x) = -x$, donc $3x = -x$, ou encore $4x = 0_E$, ce qui entraîne $x = 0_E$. Ceci montre que $G \cap H \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est automatique (car $0_E \in G \cap H$), donc on a bien $G \cap H = \{0_E\}$.*

3. (a) *Si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$, alors par linéarité de f :*

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2).$$

Mais $f(x_1) = 3x_1$ (car $x_1 \in G$), et $f(x_2) = -x_2$ (car $x_2 \in H$). Donc

$$f(x) = 3x_1 - x_2.$$

Des relations $\left\{\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \\ f(x) = 3x_1 - x_2 \end{array}\right.$, *on déduit* $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{x+f(x)}{4} \\ x_2 = \frac{3x-f(x)}{4} \end{array}\right.$.

(b) *Soit $x \in E$. Posons* $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{x+f(x)}{4} \\ x_2 = \frac{3x-f(x)}{4} \end{array}\right.$. *On a bien $x_1 + x_2 = \frac{x}{4} + \frac{3x}{4} = x$, et $x_1 \in G$, $x_2 \in H$. En effet :*

$$f(x_1) = f\left(\frac{x+f(x)}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(f(x) - f^2(x)\right);$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3x-f(x)}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(3f(x) - f^2(x)\right),$$

et $f^2(x) = 2f(x) + 3x$ (d'après la relation $(*)$), donc

$$f(x_1) = \frac{1}{4}\left(-3f(x) - 3x\right) = 3x_1,$$

$$f(x_2) = \frac{1}{4}\left(f(x) - 3x\right) = -x_2.$$

Ceci montre que tout vecteur de E se décompose sur le sous-espace somme $G + H$, donc que $E = G + H$.

4. *La question 3. montre que $E = G + H$, et la question 2. montre que la somme $G + H$ est directe. On a donc $E = G \oplus H$, c'est-à-dire que G et H sont supplémentaires dans E.*

5. (a) *Les relations établies en 3. montrent qu'en notant $x_1 = p(x)$, on a $x_2 = q(x)$, et*

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = 3x_1 - x_2 = 3p(x) - q(x).$$

Ceci montre que $f = 3p - q$.

(b) *On a $q = Id - p$, donc $p \circ q = p \circ (Id - p) = p - p \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (puisque p est un projecteur). On montre de même que $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

(c) *Montrons la formule voulue par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:*

- *Elle est vraie pour $n = 0$, car*

$$3^0 p + (-1)^0 q = p + q = Id = f^0.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^n = 3^n p + (-1)^n q$. On a alors :*

$$f^{n+1} = f^n \circ f = (3^n p + (-1)^n q) \circ f = 3^n (p \circ f) + (-1)^n (q \circ f).$$

Or, $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc :

$$p \circ f = p \circ (3p - q) = 3p \circ p - p \circ q = 3p;$$

$$q \circ f = q \circ (3p - q) = 3q \circ p - q \circ q = -q.$$

Il vient alors

$$f^{n+1} = 3^n (3p) + (-1)^n (-q) = 3^{n+1} p + (-1)^{n+1} q.$$

La propriété voulue étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = 3^n p + (-1)^n q.$$

(d) *Puisque $f = 3p - q = 3p - (Id - p) = 4p - Id$, on a $p = \frac{1}{4}(f + Id)$, et $q = Id - p = \frac{1}{4}(3Id - f)$. La relation établie en 5.(c) se réécrit alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = 3^n \left(\frac{1}{4}(f + Id)\right) + (-1)^n \left(\frac{1}{4}(3Id - f)\right) = \left(\frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\right) Id + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right) f.$$