DM3 : à rendre lundi 23/09/19

Exercice 1 (Polynômes annulateurs et projecteurs).
On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté E.
Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes $f : E \to E$ vérifiant la relation

$$\boxed{f^2 - 2f - 3Id = 0_{\mathcal{L}(E)}} \quad (*)$$

(on rappelle que f^2 désigne la composée $f \circ f$ et que $Id : E \to E$ est défini par $Id(x) = x$).

Il y a deux parties **indépendantes** :

- La première, très abordable, est l'étude d'un exemple dans $E = \mathbb{R}^3$.
- La seconde est plus générale. On se place dans un espace E quelconque, et on montre que tout endomorphisme f vérifiant $(*)$ possède les mêmes propriétés que l'exemple de la partie I.

Pour ceux qui veulent s'entraîner pour les concours plus difficiles : vous pouvez traiter directement la partie II, si vous manquez de temps.

Partie I : Etude d'un exemple

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, et on considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -2x + y - 2z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

On admet que f est linéaire, inutile de le démontrer.

1. Montrer que f vérifie la relation $(*)$.
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $G = Ker(f - 3Id)$. Quelle est la dimension de G ?
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $H = Ker(f + Id)$. Quelle est la dimension de H ?
4. Montrer que G et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.
6. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$. On la notera D (car elle est diagonale).
7. En utilisant la matrice D, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = \left(\frac{3^n + 3 \times (-1)^n}{4}\right) Id + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right) f.$$

   On rappelle que $f^0 = Id$ et $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

Partie II : Cas général

On se place maintenant dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E quelconque (**pas nécessairement de dimension finie**), et on considère un endomorphisme $f : E \to E$ quelconque, qui vérifie la relation $(*)$.

On note $G = Ker(f - 3Id)$ et $H = Ker(f + Id)$ *(on rappelle que ce sont des sev de E).*

1. Si $x \in G$, quelle relation vérifie x ? Même question pour $x \in H$.
2. Montrer que $G \cap H = \{0_E\}$.
3. On va montrer que $E = G + H$. Pour cela, on procède par analyse-synthèse :
   (a) Analyse : supposons qu'un vecteur $x \in E$ se décompose sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$. Exprimer alors les vecteurs x_1 et x_2 en fonction de x et $f(x)$.
   (b) Synthèse : montrer que tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $x_1 + x_2$, avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$.

4. Montrer que G et H sont supplémentaires dans E.
5. Notons $p : E \to E$ le projecteur sur G parallèlement à H, et $q = Id - p$ le projecteur sur H parallèlement à G.
   (a) Montrer que $f = 3p - q$.
   (b) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 3^n p + (-1)^n q$
   On rappelle que $f^0 = Id$ *et* $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ *(n fois).*
   (d) Exprimer enfin f^n en fonction de Id et f pour tout $n \in \mathbb{N}$.